7. Impulsfunksjon og impulsrespons.

(Orienteringsstoff).

Fra mekanikken kjenner du begrepet *kraftstøt*, som brukes for å beskrive en stor kraft som virker over en svært kort tid (for eksempel når en tennisracket treffer ballen). Den formelle definisjonen av kraftstøt er

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}(t)dt$$

der $\mathbf{F}(t)$ er kraften som virker mellom tennisracket og ball, og integrasjonen er tatt over hele den (korte) tiden da kraften virker.

I elektrisitetslæren har vi tilsvarende fenomen, for eksempel i form av kortvarige spennings-pulser.

Vi har altså behov for en matematisk funksjon som kan beskrive slike fenomener. Og her kommer *impulsfunksjonen* inn.

Den formelle definisjonen av *enhetsimpulsen* er litt merkelig:

Definisjon 5:
Enhetsimpuls-funksjonen $\delta(t - t_1)$ er en funksjon som tilfredsstiller begge disse kravene:

$$\delta(t - t_1) = 0 \text{ når } t \neq t_1 .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1)dt = 1$$

Enhetsimpulsen kan altså oppfates som et svært kortvarig "støt" med "styrke lik 1" som inntreffer ved tidspunktet $t = t_1$.

Hvis vi lukker øynene for noen formelle problemer, er det ikke vanskelig å finne Laplace-transformen til enhetsimpulsen til tross for at vi ikke kjenner noe funksjonsuttrykk. Av definisjonen for enhetsimpuls følger at

$$\int_0^t \delta(\tau - t_1)dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t < t_1 \\ 1 & \text{når} \quad t > t_1 \end{cases} = u(t - t_1)$$

dersom $t_1 \geq 0$. Og da Laplace-transformerer vi ved hjelp av Setning 3:

$$L\left\{\int_0^t \delta(\tau - t_1)d\tau\right\} = L\{u(t - t_1)\}$$

$$\frac{1}{s} \cdot L\{\delta(t - t_1)\} = \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t_1}$$

$$\underline{\underline{L\{\delta(t - t_1)\} = 1 \cdot e^{-s \cdot t_1}}}$$

Og nå kan vi raskt nøste opp et viktig resonnement: La pådraget (innsignalet) til et system være en enhets-impuls som inntreffer når $t_1 = 0$. Da blir Laplacetransformen til dette pådraget

$$Y(s) = 1,$$

slik at Laplace-transformen til tilstanden $x(t)$ blir

$$X(s) = H(s) \cdot Y(s) = H(s).$$

Av dette ser du at tilstanden rett og slett blir den inverse Laplacetransformen av transfer-funksjonen! Dette danner grunnlaget for:

Definisjon 6:
Dersom et system har transferfunksjon $H(s)$, kaller vi $L^{-1}\{H(s)\}$ for *impulsresponsen* til systemet.

Impulsresponsen (og dermed også transferfunksjonen) gir oss mye nyttig informasjon om hvordan et system vil reagere på et pådrag. Bare se på følgende (litt ufullstendige) resonnement:

La $y(t)$ være pådraget som virker på et system. Laplace-transformen til systemets tilstand er

$$X(s) = H(s) \cdot Y(s).$$

I praksis vil høyresiden av denne likningen være en brøk der teller og nevner begge er polynomer i *s*. For å invers-transformere, må du først delbrøkoppspalte. Da får du delbrøker der nevnerne dels er faktorer som forekommer i nevneren i $H(s)$, og dels er faktorer som forekommer i nevneren i $Y(s)$. Når du nå invers-transformerer, får du at $x(t)$ blir en sum av ledd fra impulsresponsen og ledd fra pådraget $y(t)$. Og siden du i praksis har god kontroll over pådraget, vil kjennskap til impulsresponsen kunne si deg mye om hvordan systemet vil oppføre seg.

Eksempel 7.1: Finn impulsresponsen til et system som har transferfunksjon

$$H(s) = \frac{2}{s(s-1)(s-2)}.$$

Løsning: Delberøkoppspalting gir

$$H(s) = \frac{2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}.$$

Da blir impulsresponsen

$$L^{-1}\{H(s)\} = \underline{\underline{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}}}.$$

Dette kan tolkes som systemets tilstand dersom det får et ”spark” vekk fra likevekt. Vi ser at $x(t) \to 1$ når $t \to \infty$, slik at systemet går mot en stabil tilstand $x = 1$.