1. Laplace-transformen – et nyttig hjelpemiddel.

1.1. Hva er Laplace-transformen?

Vi starter med å definere *Laplace-transformen*:

Definisjon 1:

La $f(t)$ være en funksjon som er definert for $t \geq 0$.
Da er *Laplace-transformen* til *f* definert som

$$L\{f\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

forutsatt at dette integralet eksisterer.

Når du utfører integrasjonen og setter inn grensene, vil du stå igjen med en funksjon av en ny variabel, *s*. Laplace-transformen kan altså oppfattes som en slags transformasjon til et nytt koordinatsystem der *s* er den uavhengige variabelen. Men *s* er en *kompleks* variabel. Vi har altså en transformasjon fra en reell *t*-akse og til et komplekst *s*-plan.

I praksis vil ofte $f(t)$ være en eller annen målbar fysisk størrelse: temperatur, spenning, strøm, posisjon, væskestrøm, osv. Da blir *t* symbol for *tid*.

Det er blitt vanlig praksis å bruke små bokstaver for funksjoner av *t*, og samme store bokstav for den tilhørende Laplace-transformen. Vi får da at $L\{f(t)\} = F(s)$, $L\{x(t)\} = X(s)$ osv.

Nå er det på tide å se hvordan dette fungerer i praksis. Vi skal beregne et par Laplace-transformer som vi får mye bruk for senere.

Eksempel 1.1: Beregn Laplace-transformen til
a) $f(t) = 1$, $t \geq 0$. (Denne funksjonen kalles et *enhetssprang*).
b) $f(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$.

Løsning: Vi setter inn i definisjonen, og får:

a) $L\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-s \cdot t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s}(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

forutsatt at $\mathrm{Re}(s) > 0$.

b) $L\{e^{-t}\} = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\frac{1}{s+1}\left[e^{-(s+1) \cdot t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s+1}(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{s+1}}}$

forutsatt at $\mathrm{Re}(s) > -1$.

I praksis er det sjelden vi benytter definisjonen direkte til å bestemme Laplace-transformer. Vi har en rekke standard-transformer (bl.a. de to som vi beregnet ovenfor) samt noen setninger som vi benytter. Her er en av de viktigste setningene, som jeg skal bevise litt senere:

Setning 1:

Anta at $f(t)$ har Laplace-transform $F(s)$, og at $g(t)$ har Laplace-transform $G(s)$.
La *a* og *b* være to konstanter. Da er:

$$L\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$$

Kort og upresist formulert: Vi kan Laplace-transformere ledd for ledd på samme måte som vi kan derivere eller integrere ledd for ledd.

***Eksempel 1.2*:** Beregn Laplace-transformen til
$f(t) = 1 - e^{-t}$ når $t \geq 0$.

Løsning: Vi bruker Setning 1, og får at

$$L\{1-e^{-t}\} = L\{1\} - L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1\cdot(s+1) - 1\cdot s}{s(s+1)} = \frac{s+1-s}{s(s+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{s(s+1)}}}.$$

Løs Oppgave 1.1. (Du får bruk for resultatene i senere oppgaver).

1.2. Vi løser en differensiallikning.

For å vise hva dette kan brukes til i praksis, må vi kunne et par setninger om hvordan vi finner Laplace-transformen til den deriverte av en funksjon og til integralet av en funksjon. Jeg skal sette opp disse setningene nå, og bevise dem litt senere.

Anta at $f(t)$ har Laplace-transform $F(s)$. Da gjelder:

Setning 2: $L\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$

Setning 3: $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$

Nå har vi de redskapene vi trenger til å illustrere hva Laplace-transformen kan brukes til.

Eksempel 1.3: Bruk Laplace-tranform til å løse differensiallikningen

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0\,, \qquad y(0) = 1$$

Løsning: Nå er ikke dette verdens vanskeligste differensiallikning. Men den egner seg til å vise prinsippene. Vi starter med å Laplace-transformere likningen ledd for ledd, mens vi benytter Setning 2, og skriver $Y(s)$ for Laplace-transformen til $y(t)$:

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L\{y(t)\} = L\{0\}$$

$$\left(s \cdot Y(s) - y(0)\right) + Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s \cdot Y(s) - 1 + Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (s+1) \cdot Y(s) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{Y(s) = \frac{1}{s+1}}$$

Vi har altså funnet Laplace-transformen til $y(t)$. Kan vi finne $y(t)$ selv? Det kan vi, ved hjelp av Eksempel 1.1b. Der har vi jo funnet at

$$L\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}\,.$$

Altså har vi at

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Leftrightarrow \quad L\{y(t)\} = L\left\{e^{-t}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y(t) = e^{-t}}}\,.$$

Vi ser at framgangsmåten for å løse slike differensiallikninger blir:

1. Laplace-transformer differensial-likningen. Da framkommer en algebraisk likning med Laplace-transformen $Y(s)$ som ukjent.

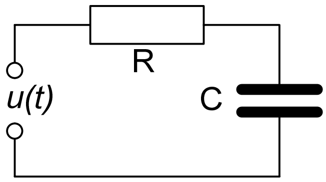
2. Løs $Y(s)$ av denne likningen.

3. Finn den funksjonen $y(t)$ som har $Y(s)$ som Laplace-transform.
   Vi sier at vi *invers-transformerer* $Y(s)$.

Løs Oppgave 1.2. (Du kan få bruk for resultater fra Oppgave 1.1).

1.3. En enkel transferfunksjon.

Laplace-transformen er også nyttig når vi jobber med fysiske systemer. La oss se på et slikt system for å illustrere teknikken. Vi tar da for oss en elektrisk krets med en motstand som har resistans *R* og en kondensator som har kapasitans *C*:



Vi antar at når det er en spenning $u(t)$ på inngangen til kretsen, går det en strøm $i(t)$ gjennom kretsen. Fra elektrisitetslæra vet vi at:

Spenningen over motstanden er $u_R(t) = R \cdot i(t)$.

Spenningen over kondensatoren er $u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$.

Da får vi at spenningen over hele kretsen er

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau .$$

Denne siste likningen Laplace-transformerer vi ledd for ledd ved hjelp av Setning 2 og Setning 3 ovenfor. Vi får:

$$U(s) = R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) I(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad I(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot U(s) \underline{\underline{= H(s) \cdot U(s)}}$$

Her har vi innført ***kretsens transferfunksjon***

$$H(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{RCs + 1}.$$

Mer presist kan vi si at $H(s)$ er transferfunksjonen for kretsen *fra inngangs-spenningen* $u(t)$ *til strømmen* $i(t)$. Vi skriver da at

$$H(s) \cdot U(s) = I(s) \quad \Leftrightarrow \quad H(s) = \frac{I(s)}{U(s)}.$$

Legg merke til at $H(s)$ kun avhenger av hvordan kretsen er bygd opp: Dersom vi kjenner *R* og *C*, er $H(s)$ fullstendig kjent. Videre merker vi oss at $I(s)$ er produktet av $H(s)$ og $U(s)$. Dette betyr at dersom vi kjenner kretsens transferfunksjon $H(s)$, og dessuten kjenner inngangs-spenningen $u(t)$, kan vi finne $U(s)$ og deretter $I(s)$. Invers-transformering gir nå $i(t)$. Dette betyr at vi enkelt kan analysere hvordan kretsen vil oppføre seg for ulike typer inngangs-spenning $u(t)$.

La oss se hvordan dette kan fungere i praksis:

Eksempel 1.4: I kretsen ovenfor antar vi at
$R = 10\,k\Omega\,,\quad C = 100\,\mu F\ .$

a) Finn kretsens transferfunksjon.

b) Hvordan blir strømmen i kretsen når inngangs-spenningen er
$u(t) = 1$ når $t \geq 0$?

Løsning:
a) Kretsens transferfunksjonen er

$$H(s) = \frac{Cs}{RCs+1} = \frac{100\cdot 10^{-6}\cdot s}{(10\cdot 10^{3})\cdot(100\cdot 10^{-6})\cdot s+1} = \underline{\underline{\frac{1.00\cdot 10^{-4}\cdot s}{s+1}}}$$

b) Når $u(t) = 1$ for $t \geq 0$, vet vi fra Eksempel 1.1 at

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

slik at

$$I(s) = H(s)\cdot U(s) = \frac{1.00\cdot 10^{-4}\cdot s}{s+1}\cdot\frac{1}{s} = \underline{1.00\cdot 10^{-4}\cdot\frac{1}{s+1}}$$

Invers-transformering ved hjelp av Eksempel 1.2 gir nå at strømmen i kretsen er

$$\underline{\underline{i(t) = 1\cdot 10^{-4}\cdot e^{-t}}}$$

målt i Ampere.

La oss gi en mer generell definisjon av ***transferfunksjon***:

Definisjon 2:

Et fysisk system utsettes for et ***pådrag*** $y(t)$ som har Laplace-transform $Y(s)$.
Dette påvirker en ***tilstandsvariabel*** $x(t)$ som har Laplace-transform $X(s)$.
Da er ***systemets transferfunksjon*** $H(s)$ ***fra y til x*** gitt ved

$$X(s) = H(s)\cdot Y(s) \quad\Leftrightarrow\quad H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}\,.$$

Løs Oppgave 1.3 og Oppgave 1.4 (Du kan få bruk for resultater fra Oppgave 1.1).

Jeg håper at disse små smakebitene gir mersmak, slik at du er motivert til å se nærmere på Laplace-transformen og dens mange anvendelser.