4. Løsing av differensiallikninger.

Vi har tidligere sett hvordan vi kan bruke Laplace-transformen til å løse differensiallikninger. Vi skal nå videreføre dette.

4.1. Laplace-transformen til den deriverte av en funksjon.

Først må vi videreutvikle Setning 2. Du husker sikkert at den var slik:

Setning 2:
Dersom
$$L\{y(t)\} = Y(s),$$
så er
$$L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = s\cdot Y(s) - y(0).$$

Av denne setningen følger:

Dersom
$$L\{y(t)\} = Y(s),$$
så er:

Setning 2b: $$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = s^2\cdot Y(s) - s\cdot y(0) - \frac{dy(0)}{dt}$$

Setning 2c: $$L\left\{\frac{d^3y(t)}{dt^3}\right\} = s^3\cdot Y(s) - s^2\cdot y(0) - s\cdot\frac{dy(0)}{dt} - \frac{d^2y(0)}{dt^2}$$

Og slik kan vi fortsette.

Vi nøyer oss med å vise Setning 2b:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = L\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\right\} = s\cdot L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} - \frac{dy(0)}{dt} = s\cdot\left(s\cdot Y(s) - y(0)\right) - \frac{dy(0)}{dt}$$
$$= \underline{\underline{s^2\cdot Y(s) - s\cdot y(0) - \frac{dy(0)}{dt}}}$$

Bevis for Setning 2c kan du utføre selv i Oppgave 4.1.

4.2. Løsing av lineære differensiallikninger.

Vi skal nå se hvordan vi går fram for å løse lineære *n*'te ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter. Legg merke til at teknikken fungerer like greit med homogene som med inhomogene differensiallikninger, og at startverdier trekkes inn i løsningen.

I eksemplene nedenfor skal vi gå ut fra at *y* er en funksjon av *t*, slik at y' betyr det samme som $\frac{dy}{dt}$. Dessuten skal vi for oversiktens skyld hoppe over detaljer i delbrøkoppspalting. Du kan gå ut fra at delbrøkoppspaltingen utføres med dataverktøy.

Eksempel 4.1: Løs differensiallikningen

$$y''-4y'+3y=2$$

når

$$y(0)=1 \text{ og } y'(0)=0.$$

Løsning: Vi Laplace-transformerer ledd for ledd, og får

$$L\{y''\}-4\cdot L\{y'\}+3\cdot L\{y\}=2\cdot L\{1\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2Y(s)-s\cdot y(0)-y'(0)\right)-4\left(s\cdot Y(s)-y(0)\right)+3Y(s)=2\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2-4s+3\right)Y(s)-s\cdot 1-0+4\cdot 1=\frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2-4s+3\right)Y(s)=\frac{2}{s}+s-4=\frac{2+s^2-4s}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{s^2-4s+2}{s\cdot\left(s^2-4s+3\right)}=\underline{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}}$$

Dette invers-transformeres til

$$y(t)=\underline{\underline{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{t}}}\,.$$

Eksempel 4.2: Løs differensiallikningen

$$y''+3y'+2y=e^{-t}$$

når

$$y(0)=-2 \text{ og } y'(0)=3.$$

Løsning: Vi Laplace-transformerer ledd for ledd, og får

$$L\{y''\}+3\cdot L\{y'\}+2\cdot L\{y\}=L\{e^{-t}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2Y(s)-s\cdot y(0)-y'(0)\right)+3\left(s\cdot Y(s)-y(0)\right)+2Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2+3s+2\right)Y(s)-s\cdot(-2)-3-3\cdot(-2)=\frac{1}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2+3s+2\right)Y(s)=\frac{1}{s+1}-2s-3=\frac{1-2s(s+1)-3(s+1)}{s+1}=\frac{-2s^2-5s-2}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{-2s^2-5s-2}{(s+1)\left(s^2+3s+2\right)}=\underline{\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}}$$

Dette invers-transformeres til

$$y(t)=\underline{\underline{t\cdot e^{-t}-2e^{-t}}}=\underline{\underline{(t-2)e^{-t}}}.$$

Eksempel 4.3: Løs differensiallikningen

$$y''+4y=5e^{-t}$$

når

$$y(0)=1 \text{ og } y'(0)=1.$$

Løsning: Vi Laplace-transformerer ledd for ledd, og får

$$L\{y''\}+4\cdot L\{y\}=L\left\{5e^{-t}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2Y(s)-s\cdot y(0)-y'(0)\right)+4Y(s)=\frac{5}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2+4\right)Y(s)-s\cdot 1-1=\frac{5}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s^2+4\right)Y(s)=\frac{5}{s+1}+s+1=\frac{5+s(s+1)+1(s+1)}{s+1}=\frac{s^2+2s+6}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{s^2+2s+6}{(s+1)\left(s^2+4\right)}=\underline{\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s^2+2^2}}$$

Dette invers-transformeres til

$$y(t)=\underline{\underline{e^{-t}+\sin(2t)}}.$$

Nå er det din tur med Oppgave 4.2.

4.3. Løsing av system av lineære 1.ordens differensiallikninger.

Vi kan også bruke Laplace-transform til å løse system av lineære 1.ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter, slik neste eksempel viser. Legg merke til at eksemplet er et system av inhomogene likninger med startbetingelser, som er temmelig kronglete å løse med vanlige metoder.

Eksempel 4.4: Løs differensiallikningene

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y + 2e^{-t} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + 3t \qquad (2)$$

når

$$x(0) = y(0) = 0\,.$$

Løsning: Vi Laplace-transformerer begge likningene:

$$s \cdot X(s) - x(0) = -2X(s) + Y(s) + 2 \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$s \cdot Y(s) - y(0) = X(s) - 2Y(s) + 3 \cdot \frac{1}{s^2}$$

Setter inn $x(0) = y(0) = 0$, og ordner:

$$(s+2)X(s) - Y(s) = \frac{2}{s+1} \qquad (1)$$

$$-X(s) + (s+2)Y(s) = \frac{3}{s^2} \qquad (2)$$

Dette er et likningssett med $X(s)$ og $Y(s)$ som ukjente. Dersom likningssettet skal løses for hand, kan det være mest naturlig å bruke addisjonsmetoden: Vi multipliserer siste likning med $(s+2)$ og legger sammen. Da får vi:

$$-Y(s) + (s+2)^2 Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s^2}(s+2)$$

$$\left(s^2 + 4s + 3\right)Y(s) = \frac{2s^2 + 3(s+2)(s+1)}{s^2(s+1)} = \frac{5s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)\left(s^2 + 4s + 3\right)} = \underline{\frac{2}{s^2} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+3}}$$

Invers-transformering gir

$$y(t) = \underline{\underline{2t - \tfrac{5}{3} + t \cdot e^{-t} + e^{-t} + \tfrac{2}{3}e^{-3t}}}\,.$$

Vi kan nå gjenta prosessen for å finne $x(t)$. Men siden vi kjenner $y(t)$, er det lettere å benytte (2), som omformes til

$$x(t) = \frac{dy}{dy} + 2y(t) - 3t$$

$$= \left(2 + \left(1 \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t}\right) - e^{-t} + \tfrac{2}{3}(-3)e^{-3t}\right) + 2\left(2t - \tfrac{5}{3} + t \cdot e^{-t} + e^{-t} + \tfrac{2}{3}e^{-3t}\right) - 3t$$

$$= 2 + e^{-t} - t \cdot e^{-t} - e^{-t} - 2e^{-3t} + 4t - \tfrac{10}{3} + 2t \cdot e^{-t} + 2e^{-t} + \tfrac{4}{3}e^{-3t} - 3t$$

$$= \underline{\underline{t - \tfrac{4}{3} + t \cdot e^{-t} + 2e^{-t} - \tfrac{2}{3}e^{-3t}}}$$

Dersom du er flink med matriseregning, eller har dataverktøy som regner matriser, kan det være mer attraktivt å løse likningssystemet (1) og (2) med matrisemetoder. På matriseform blir likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix}$$

som har løsningen

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{3}{s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2s^3+4s^2+3s+3}{s^2(s+1)^2(s+3)} \\ \dfrac{5s^2+9s+6}{s^2(s+1)^2(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Invers-transformering gir nå samme resultat som før. Her er både matriseregningen og delbrøkoppspaltingen gjort med dataverktøy.

Til slutt tar vi et eksempel som er kronglete å løse med tradisjonelle metoder.

Eksempel 4.4: Løs likningssystemet

$$x' + x + \frac{1}{2}y' = 1$$

$$\frac{1}{2}x' + y' + y = 0$$

når

$$x(0) = y(0) = 0$$

der *x* og *y* begge er funksjoner av *t*.

Løsning: Vi Laplace-transformerer begge likningene, og får:

$$(s\cdot X(s) - x(0)) + X(s) + \frac{1}{2}(s\cdot Y(s) - y(0)) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{2}(s\cdot X(s) - x(0)) + (s\cdot Y(s) - y(0)) + Y(s) = 0$$

Innsetting av $x(0) = y(0) = 0$ og ordning gir

$$(s+1)X(s) + \frac{1}{2}s\cdot Y(s) = \frac{1}{s} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}s\cdot X(s) + (s+1)\cdot Y(s) = 0 \qquad (2)$$

Dette likningssettet kan for eksempel løses ved å finne $Y(s)$ fra (2) og sette inn i (1):

$$Y(s) = -\frac{s \cdot X(s)}{2(s+1)}$$

$$(s+1)X(s) + \frac{1}{2}s \cdot \left(-\frac{s \cdot X(s)}{2(s+1)}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(s+1-\frac{1}{4}\cdot\frac{s^2}{s+1}\right)X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4(s+1)^2 - s^2}{4(s+1)}X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3s^2+8s+4}{4(s+1)}X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{4(s+1)}{s(3s^2+8s+4)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3s+2}$$

$$= \underline{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\frac{3}{2}}}$$

der delbrøkoppspaltingen er gjort med dataverktøy.

Invers-transformering gir nå

$$x(t) = \underline{\underline{1 - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t}}}.$$

Så må vi finne $Y(s)$:

$$Y(s) = -\frac{s \cdot X(s)}{2(s+1)} = -\frac{s}{2(s+1)}\cdot\frac{4(s+1)}{s(3s^2+8s+4)} = \frac{-2}{3s^2+8s+4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3s+2} = \underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{3}}}$$

Invers-transformerer:

$$y(t) = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t}}}.$$

Løs Oppgave 4.3.

Du innser forhåpentlig at siden Laplace-transformen omformer differensiallikninger til mer velkjente algebraiske likninger, kan metoden brukes til å løse differensiallikninger og system av slike likninger som kan være temmelig kronglete å løse for hand med andre metoder. Men skikkelig moro blir det først når vi tar i bruk sprangfunksjonen til å modellere funksjoner med tidsforskyvning.