2. Beregning av Laplace-transformer.

I forrige notat satte vi opp definisjonen på Laplace-transformen til en funksjon $f(t)$:

$$L\{f\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

forutsatt at dette integralet eksisterer. Vi skal nå se nærmere på når dette integralet eksisterer.

Første krav er at $f(t)$ er *stykkevis kontinuerlig*. Litt upresist kan vi si at en funksjon $f(t)$ er stykkevis kontinuerlig dersom den kan skrives på formen

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{når} \quad 0 \le t < t_1 \\ f_1(t) & \text{når} \quad t_1 < t < t_2 \\ f_2(t) & \text{når} \quad t_2 < t < t_3 \\ \cdots & \cdots \qquad \cdots \\ f_n(t) & \text{når} \quad t_n < t \end{cases}$$

der $f_0(t)$, $f_1(t)$, … $f_n(t)$ alle er kontinuerlige innen sine definisjonsområder. Dessuten må funksjonsverdiene være endelige i alle diskontinuitetspunktene. Da får vi at

$$L\{f\} = \int_0^{t_1} f_0(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt + \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt + \cdots + \int_{t_n}^{\infty} f_n(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

Og nå kan vi vise at:

> Dersom det fins tall *c* og *M* slik at
>
> $$|f(t)| \le M \cdot e^{c \cdot t} \quad \text{for alle } t \ge 0,$$
>
> så eksisterer Laplace-transformen til *f*,
> forutsatt at $\mathrm{Re}(s)$ er større enn en viss grense.

Merk at dersom denne betingelsen er oppfylt, er vi sikker på at Laplace-transformen til *f* eksisterer. Men det fins funksjoner som kan Laplace-transformeres selv om de ikke oppfyller betingelsen ovenfor. Vi skal imidlertid overlate slike funksjoner til spesialistene og gå ut fra at betingelsen ovenfor gjelder. For alle aktuelle fysiske signaler vil betingelsen være oppfylt.

Kravet ovenfor gjør det lettere for oss å beregne Laplace-transformer i praksis. Det viser seg nemlig at når dette kravet er oppfylt, er alltid

$$\lim_{t \to \infty} \int f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = 0.$$

Dette fører til at

$$\int_{t_n}^{\infty} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = 0 - \int f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt\Big|_{t=t_n} .$$

Med andre ord: Vi beregner integralet, setter inn *nedre* grense, og skifter fortegn. Innsetting av øvre grense $t=\infty$ gir alltid verdien null.

Dette er nyttig på kalkulatorer som ikke har innebygde Laplace-transformer (for eksempel TI-89). Du kan da beregne Laplace-transformen til $f(t)=e^{-t}$ slik på TI-89:

(-) ∫ (e^((-)t)*e^((-)s*t),t)|t=0

og får svaret $\dfrac{1}{s+1}$ som i Eksempel 1.1b.

Eksempel 2.1: Finn Laplace-transformen til en funksjon som er gitt ved

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad t<0 \\ 2 & \text{når} \quad 0\le t<1 \\ 0 & \text{når} \quad 1\le t<2 \\ 1 & \text{når} \quad t\ge 2 \end{cases}$$

Løsning: Dette kan være utsignalet fra en bryter som først slås fra 0 til 2, deretter tilbake til 0, og så til 1 der bryteren blir stående. Laplace-transformen blir:

$$F(s)=L\{f\}=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^1 2\cdot e^{-s\cdot t}dt+\int_1^2 0\cdot e^{-s\cdot t}dt+\int_2^{\infty} 1\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

$$=2\cdot\left[\frac{1}{-s}e^{-s\cdot t}\right]_0^1+0+1\cdot\left[\frac{1}{-s}e^{-s\cdot t}\right]_2^{\infty}=-\frac{2}{s}\left(e^{-s}-1\right)+0-\frac{1}{s}\left(0-e^{-2s}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{s}\left(2-2e^{-s}+e^{-2s}\right)}}$$

Løs Oppgave 2.1.

I praksis er det sjelden at vi beregner Laplace-transformer direkte fra definisjonen. Det er mye vanligere at vi benytter tabeller med ”standard-transformer” sammen med noen viktige setninger, omtrent som når vi deriverer eller integrerer. Vi skal nå sette opp noen slike setninger, og vi skal også lage en liten tabell over slike ”standard-transformer”.

Bevisene for setningene er ikke særlig vanskelige, men for oversiktens skyld har jeg dyttet dem ned i et eget lite notat. Jeg vil sterkt anbefale at du ofrer noen minutter til å gå gjennom disse bevisene.

Vi starter med å minne om de setningene som vi oppga i det innledende notatet:

Setning 1:

Anta at $f(t)$ har Laplace-transform $F(s)$, og at $g(t)$ har Laplace-transform $G(s)$.
La *a* og *b* være to konstanter. Da er:

$$L\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\}=a\cdot F(s)+b\cdot G(s)$$

Så var det de to setningene om Laplace-transformen til den deriverte og til integralet av en funksjon:

Anta at $f(t)$ har Laplace-transform $F(s)$. Da gjelder:

Setning 2: $L\{f'(t)\}=s\cdot F(s)-f(0)$

Setning 3: $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\cdot F(s)$

Dersom vi er litt pirkete, så er ikke setning 2 helt korrekt slik den står. Den helt korrekte versjonen er:

$$L\{f'(t)\}=s\cdot F(s)-\lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Denne lille presiseringen er viktig dersom funksjonen ikke er kontinuerlig for $t=0$ slik at

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)\neq \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Så tar vi to setninger til. Selv om de ser rare ut ved første øyekast, skal de etter hvert vise seg å være gull verd når vi skal Laplace-transformere funksjoner:

Anta at $f(t)$ har Laplace-transform $F(s)$. Da gjelder:

Setning 4: $L\{e^{a\cdot t}\cdot f(t)\}=F(s-a)$

Setning 5: $L\{t\cdot f(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}$

Setning 4 sier at dersom du kjenner Laplace-transformen til en funksjon $f(t)$, finner du Laplace-transformen til $e^{a\cdot t}f(t)$ ved å erstatte alle *s*-ene i Laplace-transformen til $f(t)$ med $s-a$.

Setning 5 sier at dersom du kjenner Laplace-transformen til en funksjon $f(t)$, finner du Laplace-transformen til $t \cdot f(t)$ ved å derivere Laplace-transformen til $f(t)$ og skifte fortegn.

Nå skal vi benytte disse setningene. Vi skal i den forbindelse utlede noen Laplace-transformer som du får mye bruk for senere. Du kan like godt lære disse resultatene utenat på samme måte som du kan de mest brukte derivasjons- og integrasjonsformlene utenat.

Eksempel 2.2: Finn Laplace-transformen til

$f(t) = e^{a \cdot t}$ når $t \geq 0$.

Løsning: Fra Eksempel 1.1a i det innledende notatet husker vi at

$$L\{1\} = \frac{1}{s}.$$

Da får vi av Setning 4 at

$$L\left\{e^{a \cdot t}\right\} = L\left\{e^{a \cdot t} \cdot 1\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{s-a}}}.$$

Legg merke til at resultatet i Eksempel 1.1b der vi fant at

$$L\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}$$

er et spesialtilfelle av denne regelen, med $a = -1$.

Løs Oppgave E2.2 (denne ***må*** du få til dersom du skal henge med videre).

Eksempel 2.3:

a) Finn Laplace-transformen til:

1) $f(t) = t$ når $t \geq 0$.

2) $f(t) = t^2$ når $t \geq 0$.

b) Vis at

$$L\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Løsning:

a) Vi tar utgangspunkt i at $L\{1\} = \frac{1}{s}$. Så bruker vi Setning 5:

$$L\{t\} = L\{t \cdot 1\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{s^2}}}.$$

På samme måte finner vi Laplace-transformen til $f(t) = t^2$:

$$L\left\{t^2\right\} = L\left\{t \cdot t\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{d}{ds}\left(s^{-2}\right) = -\left(-2s^{-3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{s^3}}}.$$

b) Fra del a) av dette eksemplet ser vi at formelen stemmer for $n=1$ og for $n=2$. Dessuten vet vi at formelen stemmer for $n=0$.

Vi skal nå anta at formelen stemmer for $n=k$, og benytte et induksjons-resonnement: Dersom formelen stemmer for $n=k$, så er

$$L\{t^k\}=\frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Da blir

$$L\{t^{k+1}\}=L\{t\cdot t^k\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{k!}{s^{k+1}}\right)=-k!\cdot\frac{d}{ds}\left(s^{-(k+1)}\right)=-k!\left(-(k+1)s^{-(k+1)-1}\right)$$
$$=(k+1)!\cdot s^{-(k+2)}=\frac{(k+1)!}{s^{k+2}}$$

Siden formelen stemmer for $n=0$, $n=1$ og $n=2$, må den stemme for $n=3$, $n=4$ osv. Altså stemmer formelen for alle heltallige, ikke-negative verdier av *n*.

Eksempel 2.4: Finn Laplace-transformen til
$f(t)=t\cdot e^{a\cdot t}$ når $t\geq 0$.

Løsning: Problemet kan løses både med Setning 4 og med Setning 5.

Vi benytter først Setning 4. Da tar vi utgangspunkt i at

$$L\{t\}=\frac{1}{s^2}.$$

Vi erstatter *s* med $s-a$, og får at

$$L\{t\cdot e^{a\cdot t}\}=\underline{\underline{\frac{1}{(s-a)^2}}}.$$

Som kontroll bruker vi Setning 5. Vi tar da utgangspunkt i at

$$L\{e^{a\cdot t}\}=\frac{1}{s-a}.$$

Da blir

$$L\{t\cdot e^{a\cdot t}\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right)=-\frac{d}{ds}(s-a)^{-1}=-(-1)(s-a)^{-2}=\underline{\underline{\frac{1}{(s-a)^2}}}.$$

Løs Oppgave 2.3.

Så tar vi et eksempel som er mye verre:

Eksempel 2.5: Finn Laplace-transformene til

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

og

$$g(t) = \cos(\omega t)$$

der ω er en konstant og $t \geq 0$.

Løsning: Vi kan alltids sette funksjonene inn i definisjonen av Laplace-transform og integrere. Men det gir grisete integrasjoner. Vi bruker heller et lite triks som tar utgangspunkt i at

$$L\{e^{a \cdot t}\} = \frac{1}{s-a}$$

selv om a er kompleks. Vi setter $a = j\omega$ der j er den imaginære enheten, og får at

$$L\{e^{j\omega t}\} = \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Men vi vet også at

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t),$$

slik at

$$L\{e^{j\omega t}\} = L\{\cos(\omega t)\} + j \cdot L\{\sin(\omega t)\}.$$

Vi sammenlikner disse to uttrykkene for $L\{e^{j\omega t}\}$, og ser at

$$L\{\cos(\omega t)\} = \underline{\underline{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}}$$

og

$$L\{\sin(\omega t)\} = \underline{\underline{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}}.$$

Vi videreutvikler disse resultatene i neste eksempel:

Eksempel 2.6: Finn Laplace-transformene til

$$f(t) = e^{a \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$$

og

$$g(t) = e^{a \cdot t} \cdot \cos(\omega t)$$

der ω er en konstant og $t \geq 0$.

Løsning: Vi benytter resultatene fra Eksempel 2.5 og Setning 4:

$$L\{e^{a \cdot t} \cdot \cos(\omega t)\} = \underline{\underline{\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}}}$$

og

$$L\{e^{a \cdot t} \cdot \sin(\omega t)\} = \underline{\underline{\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}}}.$$

Resultatene i Eksempel 2.6 er såpass viktige at vi skal se på et talleksempel:

Eksempel 2.7: Finn Laplace-transformene til

$$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(2t)$$

og

$$g(t) = e^{-t} \cdot \cos(2t)$$

der $t \geq 0$.

Løsning: Av formlene i Eksempel 2.6 får vi:

$$L\{e^{-t} \cdot \cos(2t)\} = \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2 + 2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \underline{\underline{\frac{s+1}{s^2+2s+5}}}.$$

$$L\{e^{-t} \cdot \sin(2t)\} = \frac{2}{(s-(-1))^2 + 2^2} = \frac{2}{(s+1)^2+4} = \underline{\underline{\frac{2}{s^2+2s+5}}}$$

I disse eksemplene har vi utledet Laplace-transformene til en rekke vanlige funksjoner. For oversiktens skyld samler vi alle resultatene i en liten tabell. Denne tabellen får du mye bruk for senere (i alle fall dersom du ikke klarer å pugge formlene). I praksis bruker vi vanligvis slike tabeller kombinert med setningene ovenfor når vi skal bestemme Laplace-transformer.

Tabell over noen vanlige Laplace-transformer.

	$f(t)$	$F(s)$
L1	1	$\frac{1}{s}$
L2	t	$\frac{1}{s^2}$
L3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
L4	$e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s-a}$
L5	$t \cdot e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
L6	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
L7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
L8	$e^{a \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
L9	$e^{a \cdot t} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

For å henge med videre, ***må*** du kunne bruke denne tabellen til enkle operasjoner. Derfor ***må*** du løse Oppgave E2.4.

Eksemplet nedenfor og den påfølgende oppgaven viser noen vanskeligere operasjoner.

Eksempel 2.8: Bruk tabellen og setningene til å bestemme Laplace-transformene til:

a) $f(t) = (t-1)^2$.

b) $g(t) = t \cdot \sin(2\pi t)$.

Løsning:

a) Vi starter med å kvadrere:

$$f(t) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1.$$

Så Laplace-transformerer vi ledd for ledd ved hjelp av L3 i tabellen:

$$F(s) = L\{t^2\} - 2 \cdot L\{t\} + L\{1\} = \frac{2!}{s^{2+1}} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}}} = \underline{\underline{\frac{2 - 2s + s^2}{s^3}}}$$

b) Av L6 ser vi at

$$L\{\sin(2\pi t)\} = \frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2}.$$

Da gir Setning 5 at

$$G(s) = L\{t \cdot \sin(2\pi t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2}\right)$$

$$= -\frac{0(s^2 + 4\pi^2) - 2\pi \cdot 2s}{(s^2 + 4\pi^2)^2} = \underline{\underline{\frac{4\pi s}{(s^2 + 4\pi^2)^2}}}$$

Løs Oppgave 2.5.

Før du for alvor kan bruke Laplace-transform til å løse differensiallikninger og til å jobbe med transferfunksjoner, må du lære mer om hvordan du går fra en Laplace-transform og tilbake til en funksjon av *t*. Du må gå gjennom notatet om *invers Laplace-transform*.