1. Kvadratiske former.

En ***kvadratisk form*** er et uttrykk som kun inneholder andregradsledd. Her er tre eksempler:

$$Q_1(x) = 3x^2$$
$$Q_2(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$$
$$Q_3(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^{\;2} + x_2^{\;2} - 4x_3^{\;2} + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$$

Vi skal nå gjøre en viktig observasjon:

> Enhver kvadratisk form kan skrives på matriseform:
> $$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$
> der **A** er en symmetrisk matrise.

***Eksempel 1.1*:** Vis at uttrykkene nedenfor er kvadratiske former:

a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi multipliserer ut, først fra høyre:

a)
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x + y \\ x + 2y \end{bmatrix} = x(-x + y) + y(x + 2y)$$
$$= -x^2 + xy + yx + 2y^2 = \underline{\underline{-x^2 + 2xy + 2y^2}}$$

b)
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 0x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$
$$= x_1(2x_1 + x_2 - x_3) + x_2(x_1 - 2x_3) + x_3(-x_1 - 2x_2 - x_3)$$
$$= 2x_1^{\;2} + x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_1 - 2x_2x_3 - x_3x_1 - 2x_3x_2 - x_3^{\;2}$$
$$= \underline{\underline{2x_1^{\;2} - x_3^{\;2} + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3}}$$

I eksemplet ovenfor gikk vi fra matriseform til "vanlig" kvadratisk form. Men av eksemplet ser du kanskje hvordan du skal gå fram for å gå motsatt vei:

- Koeffisientene foran kvadratleddene x_i^2 plasseres i hoveddiagonalen til **A**-matrisen.

- Koeffisientene foran ledd av typen $x_i x_j$ der $i \neq j$ deles i to, og hver halvdel plasseres i posisjon (i, j) og i posisjon (j, i) i **A**-matrisen. Dermed sikrer vi oss at **A** blir symmetrisk.

***Eksempel 1.2*:** Skriv disse kvadratiske formene ved hjelp av en symmetrisk matrise:

a) $Q_2(x, y) = x^2 - 6xy - 2y^2$

b) $Q_3(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$

Løsning:

a) Koeffisientene 1 foran x^2 og -2 foran y^2 plasseres på rette plasser i hoveddiagonalen, mens koeffisienten -6 foran *xy* fordeles likt symmetrisk om hoveddiagonalen. Vi får:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

b) Koeffisientene -2 foran x_1^2, 1 foran x_2^2 og -4 foran x_3^2 plasseres på rette plasser i hoveddiagonalen, mens koeffisientene 6 foran x_1x_2 og -2 foran x_2x_3 fordeles likt symmetrisk om hoveddiagonalen. Dessuten må vi innføre et ledd $0x_1x_3$. Vi får:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Oppgave 1.1.

2. Diagonalisering av kvadratiske former.

Vi får nå bruk for denne setningen som vi ikke skal bevise:

> Dersom **A** er en symmetrisk matrise med bare reelle ledd,
> er egenvektorene til **A** innbyrdes ortogonale.

Du husker sikkert at dersom vi tenker geometriske vektorer, betyr ”innbyrdes ortogonale” at vektorene står vinkelrett på hverandre. Den generelle definisjonen er at skalarproduktet av to innbyrdes ortogonale vektorer er lik null.

La oss se om dette stemmer med den symmetriske matrisen fra eksempel a) ovenfor:

Eksempel 2.1: Vis at egenvektorene til den symmetriske matrisen **A** nedenfor er innbyrdes ortogonale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Jeg ”fusker” og finner egenvektorene med dataverktøy. Da får jeg (med Scientific Notebook):

$$\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Skalar-multipliserer, og får

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet t_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 \cdot t_2 \left(-2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 1\right) = 0$$

Dette viser at egenvektorene er innbyrdes ortogonale.

Det er ofte hensiktsmessig å velge t_1 og t_2 slik at disse egenvektorene blir ***normerte***, d.v.s. at de får lengde lik 1. Det gjøres slik:

En vektor

$$\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

normeres ved å sette

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}}}$$

Dette viser vi slik: Normeringen innebærer at $|\mathbf{v}| = 1$, slik at

$$(tx_1)^2 + (tx_2)^2 + \cdots + (tx_n)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}}}$$

Videre er det hensiktsmessig å velge fortegn slik at egenvektorene danner et ***høyrehåndssett***.

For *tre* innbyrdes ortogonale vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ innebærer dette at dersom du griper om $\mathbf{v}_3$ med høyre hand slik at tommelen peker $\mathbf{v}_3$'s positive retning, vil de øvrige fire fingrene peke *fra* $\mathbf{v}_1$'s positive retning *mot* $\mathbf{v}_2$'s positive retning. For *to* innbyrdes ortogonale vektorer kreves at de fire fingrene peker *fra* $\mathbf{v}_1$'s positive retning *mot* $\mathbf{v}_2$'s positive retning når høyre hand legges på det planet som utspennes av vektorene.

Slike vektorer egner seg utmerket som *basisvektorer* i et nytt koordinatsystem. Eksemplet nedenfor viser hvordan vi går fram.

Eksempel 2.2: Normer egenvektorene til matrisen **A** fra eksemplet foran slik at de danner et høyrehåndssett:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Jeg har allerede funnet egenvektorene:

$$\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$t_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

og

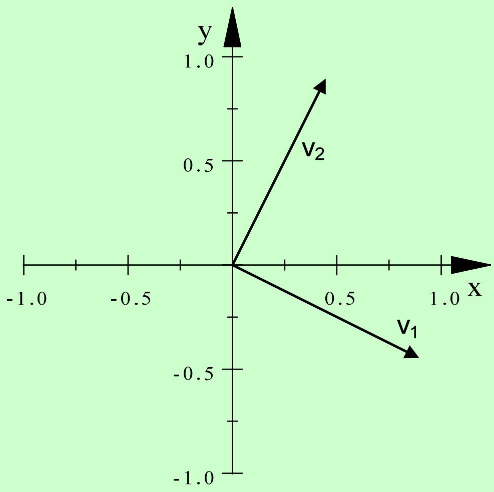
$$t_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Nå velger jeg $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ og $t_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Da blir

$$\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}}$$

mens

$$\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}}.$$



De normerte egenvektorene er tegnet til høyre. Du ser at vi får et høyrehåndssett.

Jeg kunne også valgt $t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $t_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Løs Oppgave 2.1. Du får bruk for resultatene i neste oppgave.

Nå skal vi endelig komme til poenget:

Den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

kan alltid omformes til

$$Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^{\ 2} + \lambda_2 y_2^{\ 2} + \cdots + \lambda_n y_n^{\ 2}$$

der $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ er egenverdiene til **A**,
mens $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ er koordinatene i et nytt koordinatsystem
som har de normerte egenvektorene til **A** som basisvektorer.

Vi sier at den kvadratiske formen ***diagonaliseres***.

Jeg vil sterkt anbefale at du går gjennom beviset, som du finner i et lite vedlegg. Det inneholder mange fikse anvendelser av matriseregning.

Eksempel 2.3**:** Diagonaliser den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^{\ 2} - 2x_1x_2 + 2x_2^{\ 2},$$

og begrunn at Q aldri kan bli negativ.

Løsning: Vi starter med å omforme:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Finner egenverdiene til den symmetriske matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}:$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 - (-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad .$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 1} \quad \vee \quad \underline{\lambda_2 = 3}$$

Vi kan altså omforme den kvadratiske formen til

$$Q(y_1,\ y_2) = \lambda_1 y_1^{\ 2} + \lambda_2 y_2^{\ 2} = \underline{\underline{y_1^{\ 2} + 3y_2^{\ 2}}}$$

der y_1 og y_2 er koordinater i det koordinatsystemet som har de normerte egenvektorene til **A** som basisvektorer. I dette eksemplet trenger vi ikke å regne ut disse egenvektorene.

Vi ser at uttrykket for $Q(y_1, y_2)$ aldri kan bli negativt fordi det kun inneholder kvadratledd med positive koeffisienter.

Løs Oppgave 2.2. Du får bruk for resultatene i neste oppgave.

3. Grafen til en kvadratisk form.

Vi skal nå se på hvordan vi kan tegne grafen til funksjoner som er gitt implisitt ved en kvadratisk form. Problemstillingen er altså:

Når vi skal bestemme grafen til en funksjon som er gitt implisitt ved

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = c$$

der c er en konstant, omformes den kvadratiske formen til

$$Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^{\,2} + \lambda_2 y_2^{\,2} + \cdots + \lambda_n y_n^{\,2} = c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_1^{\,2}}{\left(\frac{c}{\lambda_1}\right)} + \frac{y_2^{\,2}}{\left(\frac{c}{\lambda_2}\right)} + \cdots + \frac{y_n^{\,2}}{\left(\frac{c}{\lambda_n}\right)} = 1 \quad .$$

Her er y_1, y_2, … , y_n koordinater i et koordinatsystem som har de normerte egenvektorene til **A** som basisvektorer.

Dersom $n = 2$, blir dette et kjeglesnitt.

***Eksempel 3.1*:** Tegn grafen til funksjonen

$$2x_1^{\,2} - 2x_1x_2 + 2x_2^{\,2} = 3 .$$

Løsning: Fra eksempel 2.3 vet vi at den kvadratiske formen

$$2x_1^{\,2} - 2x_1x_2 + 2x_2^{\,2} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

kan omformes til

$$y_1^{\,2} + 3y_2^{\,2}$$

der y_1 og y_2 er koordinater i et koordinatsystem som har egenvektorene til **A** som basisvektorer. Vi har da at

$$2x_1^{\,2} - 2x_1x_2 + 2x_2^{\,2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y_1^{\,2} + 3y_2^{\,2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_1^{\,2}}{3} + \frac{y_2^{\,2}}{1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{y_1^{\,2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{y_2^{\,2}}{1^2} = 1}$$

Dette er en ellipse med halvakser $\sqrt{3}$ langs y_1-aksen, og 1 langs y_2-aksen (merk rekke-følgen).

Vi må nå finne basisvektorene:

Finner egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{matrix} (2-1)x_1 - 1x_2 = 0 \\ -1x_1 + (2-1)x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

Velger $x_2 = t_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = t_1$, slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \underline{t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Normerer:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

slik at

$$\underline{\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}.$$

Finner egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_2 = 3}$:

$$\begin{matrix} (2-3)x_1 - 1x_2 = 0 \\ -1x_1 + (2-3)x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 .$$

Velger $x_2 = t_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 = -t_2$, slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underline{t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Normerer:

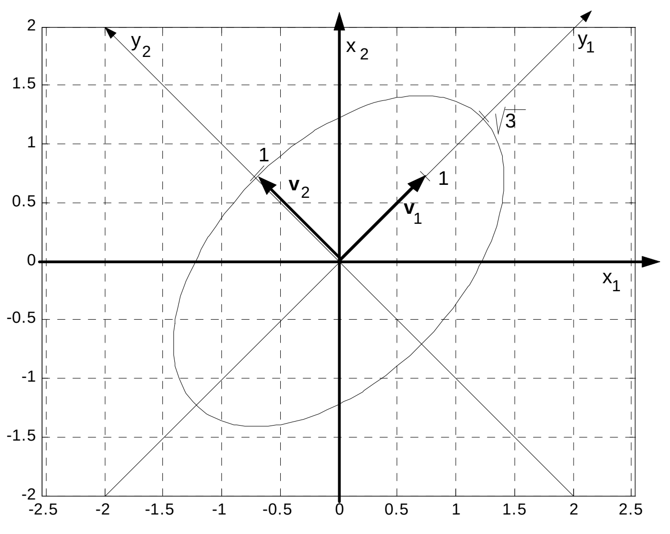
$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

slik at

$$\underline{\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}.$$

En skisse viser at dette blir et høyrehåndssett (hadde det ikke blitt høyrehåndssett, måtte vi skiftet fortegn på en av egenvektorene).

Når vi tegner grafen, må vi passe nøye på at y_1 er knyttet til $\mathbf{v}_1$ og at y_2 er knyttet til $\mathbf{v}_2$. Da får ellipsen halvakse $\sqrt{3}$ langs $\mathbf{v}_1$ og halvakse 1 langs $\mathbf{v}_2$. Grafen blir da slik figuren til høyre viser.



***Eksempel 3.2*:** Tegn grafen til funksjonen

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 4.$$

Løsning: Vi starter med å omforme:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Finner egenverdiene til den symmetriske matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 3} \quad \vee \quad \underline{\lambda_2 = -1}$$

Vi kan altså omforme den kvadratiske formen til

$$Q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \underline{3y_1^2 - y_2^2},$$

slik at funksjonen kan omformes til

$$3y_1^2 - y_2^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{y_1^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{2^2} = 1}.$$

Dette er en hyperbel med reell halvakse $\frac{2}{\sqrt{3}}$ langs y_1-aksen og imaginær halvakse 2 tilknyttet y_2, der y_1 og y_2 er koordinater i det koordinatsystemet som har de normerte egenvektorene til **A** som basisvektorer.

Finner egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_1 = 3}$:

$$\begin{aligned} (1-3)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1-3)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Velger $x_2 = t_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = t_1$, slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \underline{t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Normerer:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

slik at

$$\underline{\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Finner egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_2 = -1}$:

$$\begin{matrix} \left(1-(-1)\right)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + \left(1-(-1)\right)x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 .$$

Velger $x_2 = t_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 = -t_2$, slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underline{t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

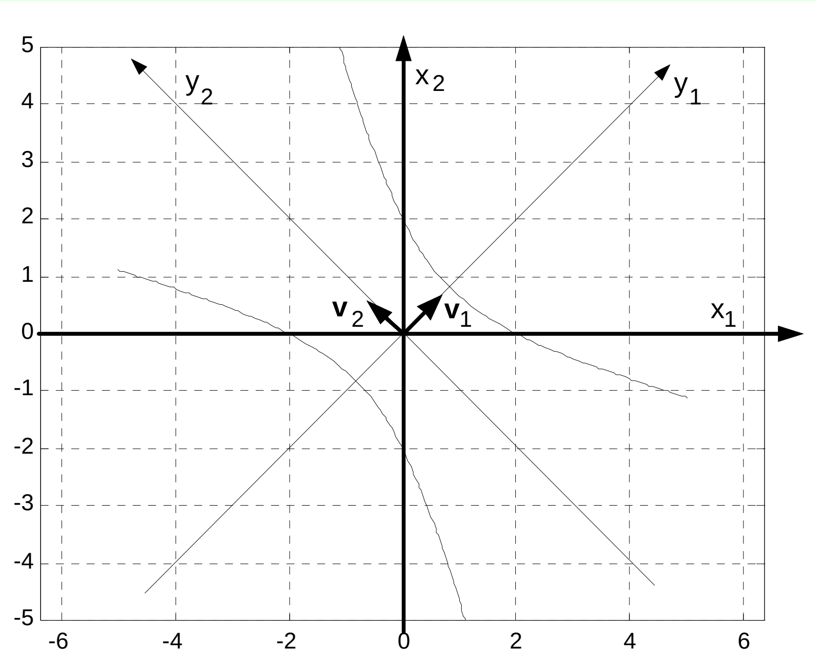
Normerer:

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

slik at

$$\underline{\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Nå kan vi tegne inn vårt nye koordinatsystem, og deretter tegne inn hyperbelen i dette systemet. Resultatet er vist nedenfor.



Oppgave 3.1.

I disse eksemplene har du sikkert oppdaget at det nye koordinatsystemet med $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som basisvektorer kan oppfattes som en dreining av det opprinnelige koordinatsystemet. For å oppnå dette, må du velge rett fortegn for t_1 og t_2 når du normerer egenvektorene slik at det nye systemet blir et høyrehåndssystem.

Dersom en funksjon inneholder førstegradsledd i tillegg til andregradsleddene, får du en forflytning i tillegg til en dreining. Denne situasjonen er behandlet i et vedlegg.