## *1. Innledning.*

Når du løser likningen

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

får du

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \underline{-1 \pm \sqrt{-1}}.$$

Og da sier du kanskje: "Negativt tall under rottegnet, ingen løsning."

Men det fins situasjoner hvor vi må kreve at slike likninger har løsning (bare vent til du kommer til andre ordens differensiallikninger). Dette dilemmaet løser vi slik:

> Vi definerer **den imaginære enheten** $i = \sqrt{-1}$.

I mange sammenhenger, f.eks. innen elektroteknikk, benyttes $j$ istedenfor $i$ som symbol for den imaginære enheten.

For å kunne bruke den imaginære enheten til noe, må vi gjøre en dristig antakelse:

> Den imaginære enheten $i$ følger de samme regnereglene som reelle tall.

Jeg skal ikke begrunne denne påstanden. Men den viser seg (heldigvis) å være korrekt.
Av definisjonen på $i$ får vi nå sammenhengen

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Og nå kan du løse den likningen som du startet med. Du får løsningene

$$x = -1 \pm \sqrt{-1} = \underline{\underline{-1 \pm i}}.$$

Disse løsningene er eksempler på et **komplekst tall**.

> Ethvert **komplekst tall *z*** kan skrives på formen
> $$z = x + iy$$
> der $x$ og $y$ er reelle tall.
> Denne formen kalles **standardformen** for komplekse tall**.**
>
> $x$ er **realdelen** av z, eller $x = \mathrm{Re}(z)$.
>
> $y$ er **imaginærdelen** av z, eller $y = \mathrm{Im}(z)$.

Løsningene av andregradslikningen består altså av to komplekse tall som har samme realdel, mens imaginærdelen har motsatte fortegn. To slike komplekse tall kalles **kompleks konjugerte**. To kompleks konjugerte tall skrives henholdsvis $z$ og $z^*$ (eller $\bar{z}$ ).

Dersom $z = x + iy$, er den **kompleks konjugerte** $z^* = x - iy$.

Oppgave 1.1, 1.2.

## *2. Regneregler for komplekse tall.*

I innledningen påsto vi at komplekse tall følger de samme regneregler som reelle tall, Dette gjør det enkelt å *addere* og *subtrahere* komplekse tall. Vi samler realdelene for seg, og imaginærdelen for seg slik eksemplene nedenfor viser.

***Eksempel 2.1:***
Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 2+3i$ og $z_2 = 4-i$.
Regn ut $z_1 + z_2$ og $3z_1 - 2z_2$.

*Løsning*:

$$z_1 + z_2 = (2+3i)+(4-i) = (2+4)+(3i-i) = \underline{\underline{6+2i}}.$$
$$3z_1 - 2z_2 = 3(2+3i)-2(4-i) = 6+9i-8+2i = \underline{\underline{-2+11i}}.$$

*Multiplikasjon* av komplekse tall er litt verre. Men hvis du husker at $i^2 = -1$, går det bra:

***Eksempel 2.2:***
Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 1+3i$ og $z_2 = 2-i$. Regn ut $z_1 \cdot z_2$.

*Løsning*:

$$z_1 \cdot z_2 = (1+3i)\cdot(2-i) = 1\cdot 2 + 1\cdot(-i) + (3i)\cdot 2 + (3i)\cdot(-i) = 2 - i + 6i - 3i^2$$
$$= 2 + 5i - 3\cdot(-1) = \underline{\underline{5+5i}}$$

Så var det *divisjon*. Da får vi bruk for denne sammenhengen:

$$\underline{z \cdot z^*} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - (-1)y^2$$
$$= \underline{x^2 + y^2}$$

Vi må ta et eksempel for å se hvordan dette fungerer.

***Eksempel 2.3:***

Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 2-3i$ og $z_2 = 3+i$. Regn ut $\dfrac{z_1}{z_2}$.

*Løsning*: Trikset går ut på å multiplisere teller og nevner med $z_2*$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{3+i} = \frac{(2-3i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)} = \frac{6-2i-9i+3i^2}{9-i^2} = \frac{(6-3)+i(-2-9)}{9+1} = \underline{\underline{\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i}}.$$

Oppgave 2.1.

Likninger med komplekse tall løses vanligvis etter samme prinsipper som likninger med reelle tall, men ved hjelp av regnereglene ovenfor slik eksemplet nedenfor viser:

***Eksempel 2.4*:** Løs likningen

$$\frac{2z-1+3i}{z+2i} = 1-3i.$$

*Løsning:* Multipliserer begge sider av likningen med $z + 2i$, og får

$$2z-1+3i = (1-3i)(z+2i) = z+2i-3zi-6i^2 = z-3zi+2i+6.$$

Samler alle $z$-leddene på venstre side:

$$2z-z+3zi = 1-3i+2i+6$$

$$(1+3i)z = 7-i$$

$$z = \frac{7-i}{1+3i} = \frac{(7-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{7-21i-i+3i^2}{1+9} = \frac{4-22i}{10} = \underline{\underline{\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i}}$$

Dersom likningen inneholder både $z$ og $z*$, må vi benytte andre metoder. Vi trenger da denne setningen:

La $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$ være to komplekse tall.
Da definerer vi **likhet** slik:

$$z_1 = z_2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 = y_2$$

***Eksempel 2.5:*** Løs likningen

$$2z+3-3i = z*-3z-1+3i.$$

*Løsning*: Først ordner vi så godt vi kan:

$$2z-z*+3z = -3+3i-1+3i$$

$$5z-z* = -4+6i$$

Så setter vi inn $z = x + iy$ og $z^* = x - iy$, og får:

$$5(x+iy)-(x-iy) = -4+6i$$
$$5x+5iy-x+iy = -4+6i$$
$$4x+6iy = -4+6i$$

Av definisjonen på likhet får vi nå:

Realdelen: $4x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=-1}$.

Imaginærdelen: $6iy = 6i \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y=1}$.

Altså er $z = x + iy = \underline{\underline{-1+i}}$.

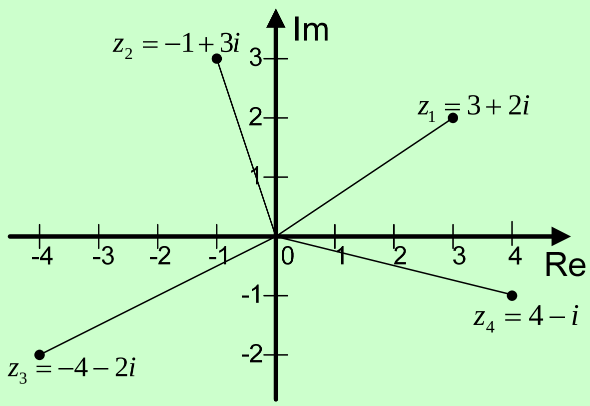
Oppgave 2.2.

## *3. Det komplekse planet. Polarform.*

Reelle tall kan avmerkes på ei vanlig tall-linje. Komplekse tall kan avmerkes i det **komplekse plan**. Dette består av en **reell akse** der realdelen av $z$ avmerkes, og en **imaginær akse** der imaginærdelen av $z$ avmerkes. Disse aksene står vinkelrett på hverandre.

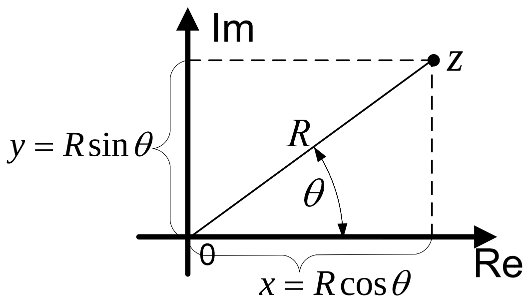
***Eksempel 3.1:*** Tegn inn disse komplekse tallene i det komplekse planet:
$z_1 = 3+2i$ $\quad z_2 = -1+3i$ $\quad z_3 = -4-2i$ $\quad z_4 = 4-i$.

*Løsning:*




På figuren til venstre ser du et komplekst plan der de fire komplekse tallene er tegnet inn:

$$z_1 = 3+2i$$
$$z_2 = -1+3i$$
$$z_3 = -4-2i$$
$$z_4 = 4-i$$




Når et komplekst tall $z$ er avmerket i det komplekse planet, kan tallet framstilles på en annen måte. Vi kan oppgi avstanden $R$ fra punktet til origo, og vinkelen $\theta$ mellom den reelle aksen og linja fra origo til punktet. Se figuren til venstre.

$R$ kalles **modulus** til $z$.
$\theta$ kalles **argumentet** til $z$.

Av figuren ser du også disse sammenhengene:

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

De to øverste likningene gir nå:

$$z = x + iy = R\cos\theta + iR\sin\theta = \underline{R\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)}$$

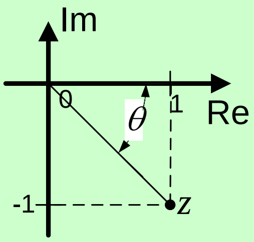
Det komplekse tallet $z$ er nå på **polar form** (kalles også **trigonometrisk form**).

***Eksempel 3.2:*** Skriv det komplekse tallet

$z = 1 - i$

på polar form.

*Løsning*:




$$R^2 = x^2 + y^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad R = \underline{\sqrt{2}}$$

fordi $R$ må være positiv.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \underline{-\tfrac{1}{4}\pi}$$

fordi $z$ ligger i 4. kvadrant. Altså er

$$z = \underline{\underline{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)}}.$$

Legg merke til at tallet

$z_1 = -1 + i$

også får $R_1 = \sqrt{2}$ og $\tan\theta_1 = -1$. Men $z_1$ ligger i 2. kvadrant slik at $\theta_1 = \tfrac{3}{4}\pi$. Derfor blir

$$z_1 = \underline{\underline{\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)}}.$$

Når du omformer tall fra standardform til polar form, bør du alltid lage en tegning. Ellers er det lett å bruke en argumentvinkel som er $180^\circ$ feil.

`Oppgave 3.1`, `3.2`.

## *4. Eksponentiell form. Eulers formel.*

Vi får nå bruk for en sammenheng som kan virke temmelig merkelig. Sammenhengen kalles ***Eulers formel***. Et bevis forutsetter at du behersker *Taylor-rekker*, og er dyttet ut i et vedlegg.

Her er ***Eulers formel:***

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Dette betyr at du kan skrive

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = \underline{R\cdot e^{i\theta}}$$

Dette er den **eksponentielle formen** for et komplekst tall.

***Eksempel 4.1:*** Skriv disse komplekse tallene på eksponentiell form:

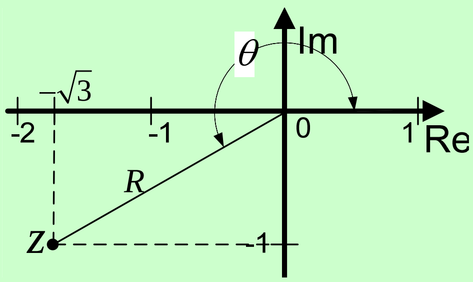
a) $z = 1 - i$ b) $z = -\sqrt{3} - i$

*Løsning:*

a) Fra eksempel 3.2 vet vi at $z = 1 - i$ har $R = \sqrt{2}$ og $\theta = -\tfrac{1}{4}\pi$.

Altså er $z = 1 - i = \underline{\underline{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi i}}}$.

b)




$$R = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \underline{2}.$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \underline{\tfrac{7}{6}\pi}$$

fordi z ligger i 3. kvadrant. Altså er

$$z = \underline{\underline{2e^{\frac{7}{6}\pi i}}}.$$

**Oppgave 4.1**, **4.2**.

Noen slike sammenhenger er såpass enkle at de virker helt merkelige, for eksempel disse:

$i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ fordi det komplekse tallet $z = 0 + 1i$ har modulus 1 og argument $\theta = \tfrac{1}{2}\pi$.

$-1 = e^{\pi i}$ fordi det komplekse tallet $z = -1 + 0i$ har modulus 1 og argument $\theta = \pi$.

$-i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$ fordi det komplekse tallet $z = 0 - 1i$ har modulus 1 og argument $\theta = \tfrac{3}{2}\pi$.

Et komplekst tall endrer ikke verdi dersom argumentvinkelen øker med $2\pi$, eller $4\pi$, eller $6\pi$, eller… Generelt har vi at:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta \pm n\cdot 2\pi)} \text{ der } n \text{ er et helt tall.}$$

**Oppgave 4.3**.

Vi har tidligere sagt at de vanlige regnereglene for reelle tall også skal gjelde for den imaginære enheten *i*. Men da må også potens-regnereglene gjelde for komplekse tall. Dette gir oss flere nyttige regler:

Vi har to komplekse tall $z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = R_2 e^{i\theta_2}$.
Da blir:

$$z_1 \cdot z_2 = R_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot R_2 \cdot e^{i\theta_2} = R_1 \cdot R_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \cdot e^{i\theta_1}}{R_2 \cdot e^{i\theta_2}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$z^n = \left(R \cdot e^{i\theta}\right)^n = R^n \cdot e^{i \cdot n\theta}$$

Litt upresist kan vi si at:

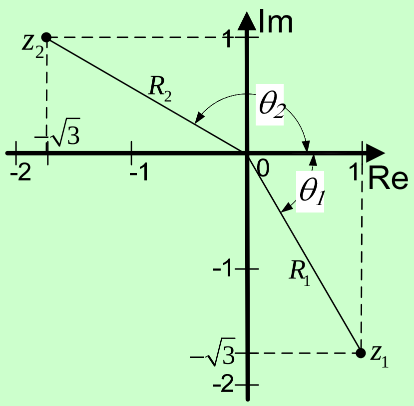
- Vi multipliserer to komplekse tall ved å multiplisere deres modulus og addere deres argumentvinkler.
- Vi dividerer to komplekse tall ved å dividere deres modulus og trekke argumentvinklene fra hverandre.

***Eksempel 4.2:*** Du har de to komplekse tallene

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \qquad \text{og} \qquad z_2 = -\sqrt{3} + i\,.$$

Finn $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ og $z_1^{\,3}$ på standardform ved å gå veien om den eksponentielle formen.

*Løsning:*




For $z_1$ får vi:

$$R_1 = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \underline{2}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \underline{-\tfrac{1}{3}\pi}$$

fordi $z_1$ ligger i 4. kvadrant. Da blir

$$z_1 = \underline{2e^{-\frac{1}{3}\pi i}}\,.$$

For $z_2$ får vi:

$$R_2 = \underline{2}\,,\ \tan\theta_2 = \frac{1}{-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \underline{\tfrac{5}{6}\pi}$$

fordi $z_2$ ligger i 4. kvadrant. Da blir

$$z_2 = \underline{2e^{\frac{5}{6}\pi i}}\,.$$

Altså er

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{-\frac{1}{3}\pi i} \cdot 2e^{\frac{5}{6}\pi i} = 4e^{-\frac{2}{6}\pi i + \frac{5}{6}\pi i} = 4e^{\frac{1}{2}\pi i} = \underline{\underline{4i}}\,.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-\frac{1}{3}\pi i}}{2e^{\frac{5}{6}\pi i}} = e^{-\frac{1}{3}\pi i - \frac{5}{6}\pi i} = e^{-\frac{7}{6}\pi i} = \cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i}}\,.$$

$$z_1^{\,3} = \left(2e^{-\frac{1}{3}\pi i}\right)^3 = 8e^{-\pi i} = \underline{\underline{-8}}\,.$$

**Oppgave 4.4.**

Vi kan også utlede disse sammenhengene:

**Eulers formler:**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

**Moivres formel:**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

I **Oppgave 4.5** og **4.6** skal du prøve å utlede disse formlene selv.

**Oppgave 4.7**.

## *5. Hvordan trekker du røtter av komplekse tall?*

Når vi skal trekke røtter av komplekse tall, starter vi med å overføre tallene til eksponentiell form. Her ser du framgangsmåten for å trekke kvadratrota av et komplekst tall:

Start med å skrive tallet på formen $z = R\cdot e^{\theta i}$. Deretter trekker du kvadratrota slik:

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = \left(R\cdot e^{\theta i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta i} = \underline{\sqrt{R}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)}\ .$$

Noe forenklet kan vi si at du trekker kvadratrota av modulus og halverer argumentvinkelen.

Men du får faktisk en løsning til. For du kan jo addere $2\pi$ til argumentet uten at $z$ endrer verdi. Men $\sqrt{z}$ endrer verdi:

$$\sqrt{z} = \left(\mathrm{Re}^{(\theta+2\pi)i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}\cdot e^{\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)i} = \sqrt{R}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta i}\cdot e^{\pi i} = \sqrt{R}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta i}\cdot(-1)$$

$$= \underline{-\sqrt{R}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)}$$

Altså har vi at:

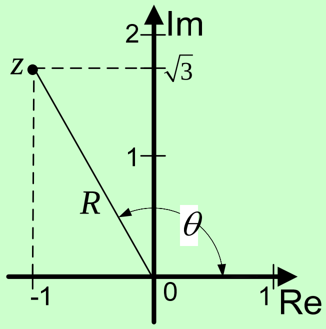
Når $z = R\cdot e^{\theta i}$, blir $\sqrt{z} = \pm\sqrt{R}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$.

Legg merke til at når du trekker kvadratrota av et komplekst tall, får du alltid to verdier med motsatte fortegn.

***Eksempel 5.1:***

Beregn $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$ .

*Løsning:*




Definerer $z=-1+i\sqrt{3}$, og skriver $z$ på eksponentiell form:

$$R=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\underline{2}.$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}\quad\Rightarrow\quad \underline{\theta=\tfrac{2}{3}\pi}$$

fordi $-1+i\sqrt{3}$ ligger i 2. kvadrant. Altså er

$$z=\underline{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}.$$

Da er

$$\sqrt{-1+i\sqrt{3}}=\pm\left(2e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{3}\pi i}=\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)=\pm\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$=\underline{\underline{\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}}$$

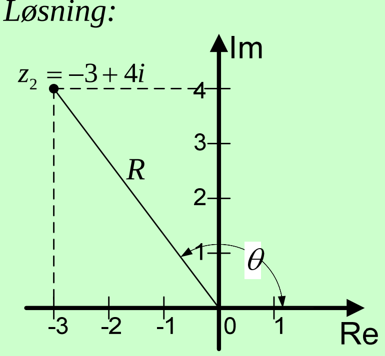
Noen ganger kan det lønne seg å bruke formlene for sinus og cosinus til halve vinkler:

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},\qquad \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.$$

Eksemplet nedenfor viser en anvendelse:

***Eksempel 5.2:*** Beregn $\sqrt{-3+4i}$.

*Løsning:*




Vi tegner inn $z=-3+4i$ i det komplekse planet, og ser at

$$R=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\underline{5}.$$

Da blir

$$\cos\theta=\tfrac{-3}{5}$$

slik at

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vi bruker positivt fortegn på både $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ og $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ fordi vi ser av figuren at $\frac{\theta}{2}$ blir liggende i 1. kvadrant. Dermed har vi at

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)=\pm\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\underline{\underline{\pm(1+2i)}}.$$

**Oppgave 5.1**.

Du løser andregradslikninger med komplekse koeffisienter med den velkjente formelen for løsing av andregradslikninger. Deretter finner du kvadratrota av et komplekst tall på vanlig måte, slik eksemplet nedenfor viser:

***Eksempel 5.3:*** Løs likningen

$$z^2 + 2iz - 1 - i = 0 .$$

*Løsning:* Du bruker den velkjente formelen:

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(-1-i)}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+4+4i}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4i}}{2} = \underline{-i \pm \sqrt{i}} .$$

Men

$$\sqrt{i} = \pm\left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm e^{\frac{1}{4}\pi i} = \pm\left(\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right) = \pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right),$$

slik at

$$z = \underline{-i \pm \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)} .$$

De to løsningene blir da:

$$z_1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\left(-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)}} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\left(-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)}} .$$

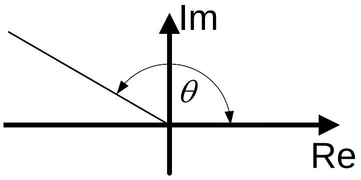
Merk at løsningene ikke er kompleks konjugerte.

`Oppgave 5.2.`

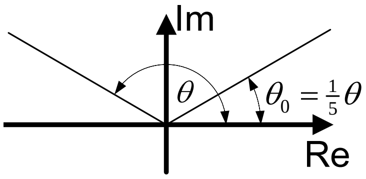
Du kan også trekke $n$-te rot av komplekse tall. Framgangsmåten er slik:

1. Overfør tallet til formen $z = R\cdot e^{i(\theta + m\cdot 2\pi)}$, $m = 0, 1, \ldots\ n-1$.
2. $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(R\cdot e^{i(\theta+m\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = R^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\left(\frac{1}{n}\theta + \frac{1}{n}\cdot 2m\cdot\pi\right)}$, $m = 0, 1, \ldots\ n-1$.
3. Du får $n$ løsninger. Overfør disse til standardform.

La oss se nærmere på hva som egentlig står her. La oss trekke 5. rot ($n$ = 5) som eksempel, og spesielt holde øye med argumentvinkelen.

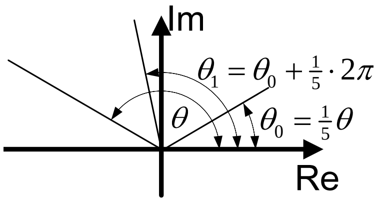



Vi starter med $z = R\cdot e^{i\theta}$, d.v.s. at $z$ har argumentvinkel $\theta$.




Først setter du $m$ = 0, slik at $\sqrt[5]{z}$ får en argumentvinkel

$$\theta_0 = \tfrac{1}{5}\theta .$$




Så setter du $m$ = 1. Da får $\sqrt[5]{z}$ en argumentvinkel

$$\theta_1 = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{1}{5}\cdot 2\pi .$$

Du legger altså $\frac{1}{5}$ av et helt omløp til den forrige argumentvinkelen.

Neste gang setter du $m = 2$. Da får du

$$\theta_2 = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{1}{5}\cdot 4\pi = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{2}{5}\cdot 2\pi ,$$

slik at du legger til en ny femdel av et helt omløp. Og slik fortsetter det oppover.

Men når $m = 5$, er det slutt. For da blir $\theta_5 = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{5}{5}\cdot 2\pi = \tfrac{1}{5}\theta + 2\pi$. Og denne argumentvinkelen gir jo samme $z$-verdi som $\theta_0 = \tfrac{1}{5}\theta$.

Dette systemet får du uansett verdi av $n$. Vi sammenfatter:

Du får alltid $n$ forskjellige verdier når du trekker $n$'te rot av et komplekst tall $z = R\cdot e^{i\theta}$.

Den første verdien får modulus $\sqrt[n]{R}$ og argumentvinkel $\theta_0 = \tfrac{1}{n}\theta$.

De andre verdiene har samme modulus, mens argumentvinklene øker med $\tfrac{1}{n}\cdot 2\pi$ for hver verdi.

***Eksempel 5.4*:** Finn $\sqrt[3]{-1}$.

*Løsning:* Definerer $z = -1 = e^{\pi i}$. De tre verdiene av $\sqrt[3]{-1}$ blir nå:

$$z_0 = \left(e^{\pi i}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}}.$$

$$z_1 = e^{\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\cdot 2\pi\right)i} = e^{\pi i} = \underline{\underline{-1}}.$$

$$z_2 = e^{\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\cdot 2\pi\right)i} = e^{\frac{5}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}}.$$

Oppgave 5.3.

## *6. Algebraens fundamentalteorem.*

Takket være de komplekse tallene kan vi nå bevise en setning som er så sentral at den har fått betegnelsen **algebraens fundamentalteorem**:

Ethvert polynom

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

kan faktoriseres til

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n)$$

der $r_1, r_2, \ldots, r_n$ er $n$ entydig bestemte komplekse tall.

Merk at koeffisientene $c_0, c_1, \ldots, c_n$ kan være komplekse tall.

Vi skal ikke gjennomføre beviset her.

Av dette teoremet følger direkte:

Enhver *n*'tegrads likning har *n* løsninger.

Noen av disse løsningene kan riktignok være like. Dersom likningen har *q* like løsninger, sier vi at denne løsningsverdien har **multiplisitet *q***.

Videre kan vi vise:

Dersom en *n*'tegrads likning bare har reelle koeffisienter, er løsningene enten reelle eller kompleks konjugerte par.

**Oppgave 6.1.**

Jeg kan godt forstå det hvis du synes at komplekse tall er noen merkelige greier. Men du skal snart se at komplekse tall er svært nyttige, for eksempel når vi skal løse differensiallikninger. Dessuten er faktisk komplekse tall et nyttig hjelpemiddel innenfor mange tekniske fag, ikke minst innenfor elektroteknikk. Jeg vil imidlertid ikke ta opp slike anvendelser her.

De mest avanserte kalkulatorene kan regne med komplekse tall. Dersom du har en slik kalkulator, kan du få merkelige resultater som for eksempel at $\ln(-2) = \ln 2 + \pi i$ stikk i strid med vår fasttømrede oppfatning om at det er umulig å ta logaritmen til negative tall. Vi kan også få sinus- og cosinus-verdier som er større enn 1 eller mindre enn -1. For eksempel gir min kalkulator at $\arcsin 2 = \frac{1}{2}\pi - \ln\left(\sqrt{3}+2\right)i$. Jeg har laget et lite notat om komplekse argumenter i funksjonsuttrykk der nysgjerrige studenter kan finne forklaringen på disse raritetene.