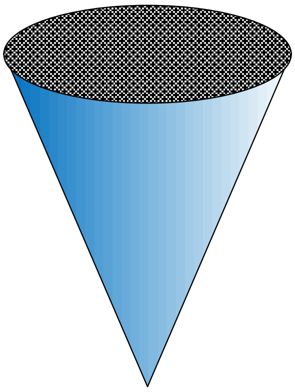
# *Kjeglesnitt.*

## 1. Innledning.

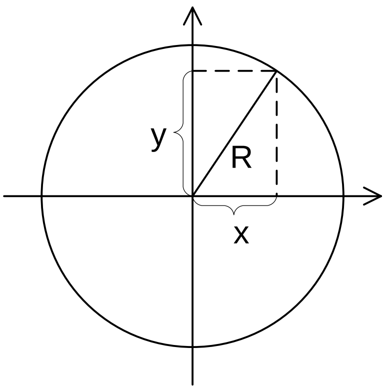


Dersom en rett kjegle skjæres av et plan, kan det oppstå ulike ***kjeglesnitt*** avhengig av hvordan planet skjærer kjeglen. Dersom planet skjærer vinkelrett på kjeglens akse, får vi en ***sirkel***. Dersom planet skjærer litt skrått, får vi en ***ellipse***. Dersom planet skjærer parallelt med en sidekant, får vi en ***parabel***. Og dersom planet skjærer parallelt med kjeglens akse, får vi den ene greina av en ***hyperbel***. Dessuten får vi et ***punkt*** dersom planet berører kjeglens toppunkt, og en ***rett linje*** dersom planet tangerer kjeglens overflate.

Slike kjeglesnitt har vært studert siden matematikkens spede barndom, og man har funnet mange interessante egenskaper ved kjeglesnittene. Den mest kjente egenskapen er kanskje at banene til planeter og meteorer er kjeglesnitt.

I dette lille notatet skal jeg ta for meg noen av de viktigste egenskapene ved sirkelen, ellipsen, hyperbelen og parabelen. Jeg skal organisere stoffet slik at jeg i hoveddokumentet presenterer likningene for de ulike kjeglesnittene, med lenker til vedlegg med en mer utfyllende omtale.

## 2. Sirkelen.

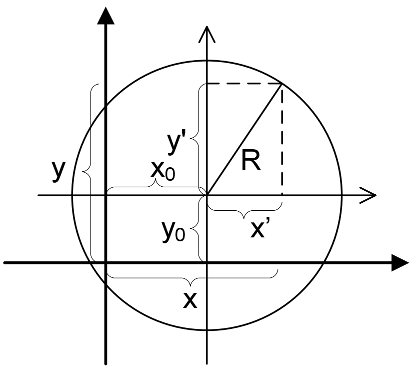



En ***sirkel*** består av alle punkter som har samme avstand fra et punkt som kalles ***sirkelens sentrum***. Avstanden fra sentrum til punktene kalles ***sirkelens radius***.

Dersom vi legger sirkelens sentrum i origo for et kartesisk koordinatsystem, ser vi av figuren til venstre at

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Dette er likningen for en sirkel med sentrum i origo.




Dersom sirkelen ikke har sentrum i origo, blir likningen litt mer komplisert. Sirkelen på figuren til venstre har sentrum i $(x_0, y_0)$. Vi legger da inn et nytt koordinat-system med sentrum i $(x_0, y_0)$. Vi ser da at

$$x = x_0 + x' \quad \Leftrightarrow \quad x' = x - x_0$$
$$y = y_0 + y' \quad \Leftrightarrow \quad y' = y - y_0 \,.$$

Likningen for en sirkel med sentrum i $(x_0, y_0)$ blir da

$$(x')^2 + (y')^2 = R^2$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Vi har altså funnet at:

Likningen for en sirkel med radius $R$ og sentrum i $(x_0, y_0)$ er

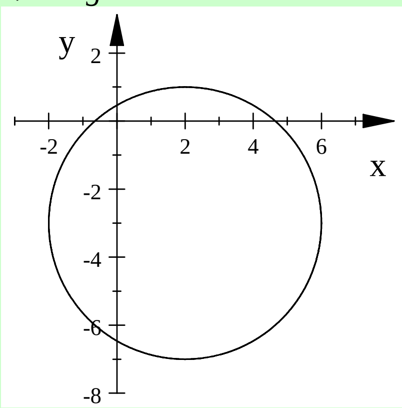
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

***Eksempel 2.1:*** Vis at

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$$

er likningen for en sirkel.

*Løsning:*




Vi omformer likningen ovenfor litt:

$$(x^2 - 4x + \quad) + (y^2 + 6y + \quad) = 3.$$

Planen er å fylle ut de åpne feltene med tall slik at vi får fullstendige kvadrat. I den første parentesen må vi da føye til $\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^2 = 4$, og i den andre parentesen må vi føye til $\left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^2 = 9$. Men da må vi også føye til $4 + 9 = 13$ på den andre siden av likhetstegnet. Vi får altså:

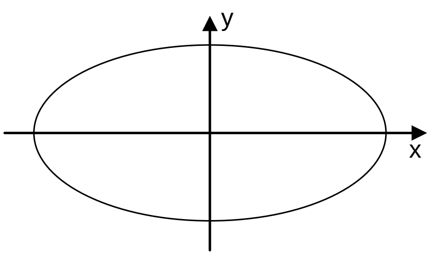
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 13$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$$

Dette viser at vi har en sirkel med radius $R = 4$ og sentrum i $(x_0, y_0) = (2, -3)$.

Oppgave 2.1

## 3. Ellipsen.




Figuren til venstre viser en ***ellipse*** som er plassert "midt" i et koordinatsystem. Likningen for en slik ellipse er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

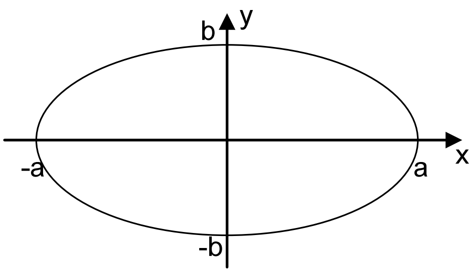
Merk 1-tallet på høyre side av likhetstegnet.

Ellipsen skjærer $x$-aksen når $y = 0$. Da blir

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm a.$$

På tilsvarende måte finner vi skjæring med $y$-aksen:

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm b.$$




Se figuren til venstre.

Det største av tallene $a$ og $b$ kaller vi ***ellipsens store halvakse***. Det minste av tallene blir da ***ellipsens lille halvakse***.

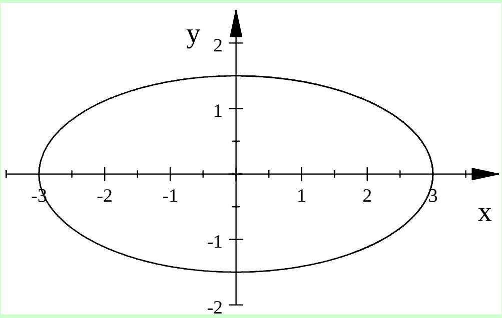
Slik ellipsen er plassert, faller origo sammen med ***ellipsens sentrum***.

***Eksempel 3.1:*** Vis at

$$x^2 + 4y^2 = 9$$

er likningen til en ellipse.

*Løsning:*




Vi må først skaffe oss et 1-tall på høyre side ved å dele på 9:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1.$$

Så må vi få kvadrat-tall i nevnerne:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$$

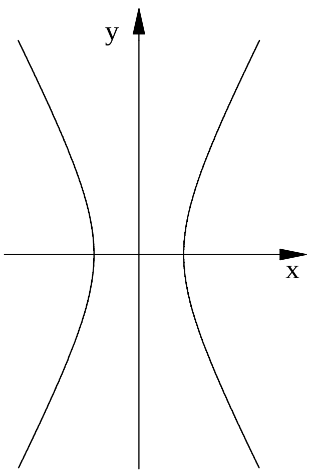
Dette er likningen for en ellipse der store halvakse er $a = 3$ langs $x$-aksen, og lille halvakse er $b = \frac{3}{2}$ langs $y$-aksen.

Oppgave 3.1.

Dersom ellipsens sentrum ikke faller i koordinatsystemets origo, blir likningen for ellipsen mer komplisert. Denne situasjonen er behandlet i et lite tillegg.

Du kan lese mer om ellipsen i et annet lite tilleggsnotat, der vi viser hvordan likningen for ellipsen utledes, og viktige begrep som brennpunkt og eksentrisitet tas opp.

## 4. Hyperbelen.




Figuren til venstre viser en ***hyperbel*** som er plassert "midt" i et koordinatsystem. Likningen for en slik hyperbel er

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Merk 1-tallet på høyre side av likhetstegnet.

Merk også likheten med ellipse-likningen, men at det nå er et minustegn mellom de to kvadratleddene.

På samme måten som for ellipsen finner vi skjæringen med $x$-aksen ved å sette $y = 0$. Da blir

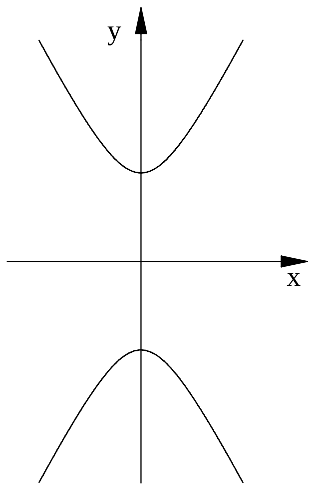
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm a\,.$$

Men dersom vi setter $x = 0$, får vi

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -b^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm ib$$

der $i = \sqrt{-1}$. Vi får altså ingen skjæring med *y*-aksen, noe vi også ser av figuren.

Vi kaller *a* for ***hyperbelens reelle halvakse***, mens *b* er ***hyperbelens imaginære halvakse***.




Figuren til venstre viser en annen hyperbel. Likningen for denne er

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

I denne likningen er det *y*-leddet som er positivt, mens *x*-leddet er negativt.

Vi går fram på samme måte som ovenfor, og finner at denne hyperbelen skjærer *y*-aksen når $y = \pm b$. Det blir ingen skjæring med *x*-aksen. Dette medfører at den reelle halvaksen er *b*, og den imaginære halvaksen er *a*.

Når vi skal tegne grafen til en hyperbel, bør vi starte med å finne hyperbelens ***asymptoter***. Dette er rette linjer som grafen nærmer seg mot når vi kommer langt bort fra origo.

Vi omformer hyperbel-likningen, og får enten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

eller

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + 1\,.$$

For begge likningene skal vi nå komme så langt bort fra origo at $x >> a$. Da blir $\frac{x^2}{a^2} >> 1$, slik at begge likningene reduseres til

$$\frac{y^2}{b^2} \approx \frac{x^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad y \approx \pm\frac{b}{a}x\,.$$

De to rette linjene

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

er da likningene for hyperbelens asymptoter. Skjæringspunktet mellom asymptotene kalles ***hyperbelens sentrum***. Huskeregel: Erstatt 1-tallet i hyperbel-likningen med 0, og løs *y*.

Dermed har vi en foreløpig oppskrift for å tegne grafen til en hyperbel med sentrum i origo:

1. Om nødvendig omformes likningen slik at du får 1 på høyre side.
2. Finn skjæringspunktene med $x$-aksen ( $x = \pm a$ ) dersom hyperbellikningen er
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
eller med $y$-aksen ( $y = \pm b$ ) dersom hyperbellikningen er
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
3. Tegn inn asymptotene $y = \pm \frac{b}{a} x$.
4. Tegn en pen skisse av begge hyperbel-greinene.

Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

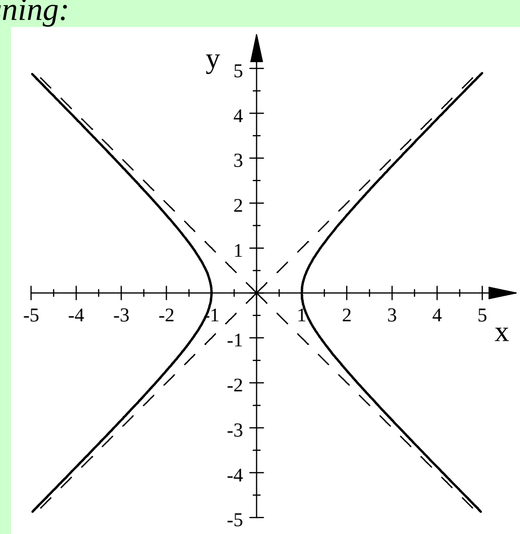
***Eksempel 4.1:*** Tegn grafene til disse hyperblene:

a) $x^2 - y^2 = 1$.

b) $9y^2 - 4x^2 = 36$

*Løsning:*

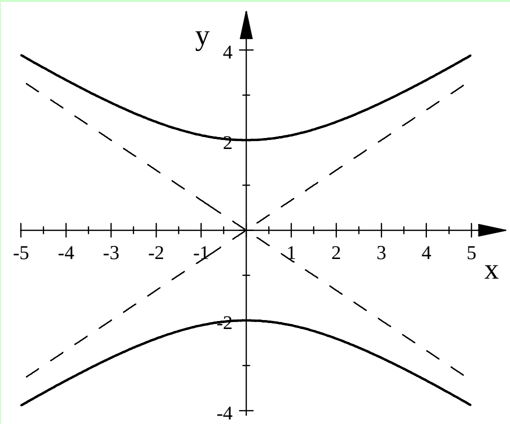
a)




Denne likningen er allerede på standard form. Dette ser vi tydeligere dersom vi skriver den på formen
$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1.$$
Da ser vi at den reelle halvakse er $a = 1$, og at vi får skjæring med $x$-aksen når $x = \pm 1$. Det er ingen skjæring med $y$-aksen.

Asymptotene blir
$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm x.$$

b)




Vi må først dele på 36 for å få standardform:
$$\frac{9y^2}{36} - \frac{4x^2}{36} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$
Da ser vi at den reelle halvakse er $b = 2$, og at vi får skjæring med $y$-aksen når $y = \pm 2$. Det er ingen skjæring med $x$-aksen.

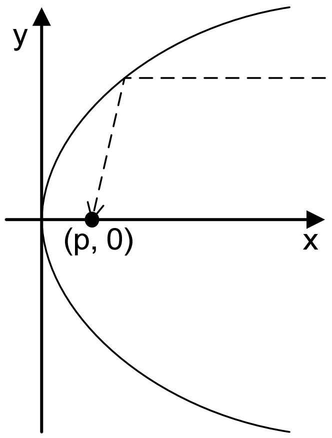
Asymptotene blir
$$-\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \frac{2}{3} x.$$

Prøv deg selv på Oppgave 4.1.

Dersom asymptotene ikke skjærer hverandre i koordinatsystemets origo, blir likningen for hyperbelen mer komplisert. Denne situasjonen er behandlet i et lite tillegg.

Du kan lese mer om hyperbelen i et annet lite tilleggsnotat.

## 5. Parabelen.




Ved siden av sirkelen er nok ***parabelen*** det kjeglesnittet som du kjenner best fra før. Grafen til en parabel er ikke noe annet enn en vanlig andregradskurve.

Parabel-likningen på standardform er

$$y^2 = 4px\,.$$

Her er $p$ avstanden fra origo til parabelens ***brennpunkt***, som har den egenskapen at alle stråler som kommer inn parallelt med parabelens akse (som her faller sammen med $x$-aksen) vil reflekteres til brennpunktet. Dette benyttes bl.a. i parabolske antenner. Eller omvendt: Alle stråler som går ut fra brennpunktet, går ut parallelt med aksen. Dette benyttes bl.a. i billykter der pæren plasseres i brennpunktet.

Parabel-likningen ovenfor fører til at parabelens ***topp-punkt*** faller i origo, med positiv $x$-akse som parabelakse. Vi har imidlertid tre andre former for denne standard-likningen. Disse formene summeres opp nedenfor:

| Likning | $y^2 = 4px$ | $y^2 = -4px$ | $x^2 = 4py$ | $x^2 = -4py$ |
|---|---|---|---|---|
| Brennpunkt | $(p,0)$ | $(-p,0)$ | $(0,p)$ | $(0,-p)$ |
| Akse | Positiv $x$-akse | Negativ $x$-akse | Positiv $y$-akse | Negativ $y$-akse |

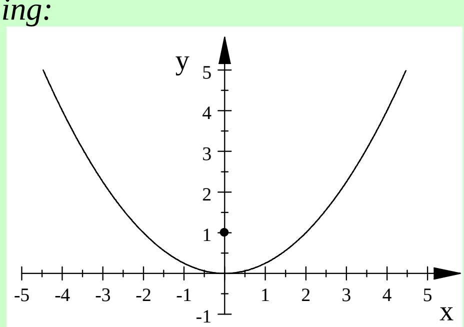
***Eksempel 5.1:*** Angi brennpunktets plassering og skisser grafen til disse parablene:

a) $x^2 - 4y = 0$

b) $y^2 + 8x = 0$

*Løsning:*

a)



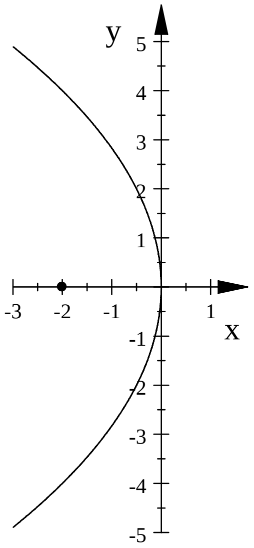

Omformer likningen slik:

$$x^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4\cdot 1y\,.$$

Av tabellen ser vi at dette svarer til en parabel med brennpunkt i $(0,1)$ og topp-punkt i origo.

Se figuren til venstre.

b)




Omformer likningen slik:

$$y^2 + 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -4 \cdot 2x \,.$$

Av tabellen ser vi at dette svarer til en parabel med brennpunkt i $(-2, 0)$ og topp-punkt i origo.

Se figuren til venstre.

Prøv deg selv på Oppgave 5.1.

Dersom parabelen ikke har topp-punkt i origo, blir likningen for parabelen litt mer komplisert. Denne situasjonen er behandlet i et lite tillegg.

Du kan lese mer om parabelen i et annet lite tilleggsnotat. Der utledes likningen for en parabel, og refleksjonsegenskapene bevises.