# 2. Volumberegning.

Når vi skal bruke integrasjon til å beregne volumet $V$ av et legeme, tenker vi oss at legemet deles opp i små biter på en slik måte at vi kan beregne volumet $\Delta V$ av hver bit. Deretter finner vi volumet av hele legemet ved å summere bidragene fra hver bit:

$$V = \sum \Delta V$$

Videre tenker vi oss at hver bit gjøres mindre og mindre samtidig som antall biter stadig øker. Da blir

$$V = \int dV$$

der vi integrerer over hele legemet.

Generelt vil slik integrasjon over et romlegeme kreve at vi løser et dobbelt- eller trippel-integral. Dette ligger utenfor pensum i dette kurset. Vi skal begrense oss til legemer som har spesiell form slik at vi kan klare oss med vanlige enkelt-integraler. Vi skal spesielt ta for oss legemer som er rotasjons-symmetriske.

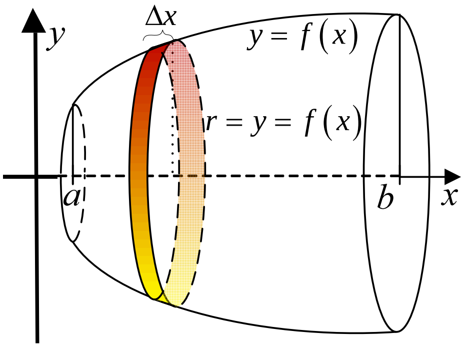
## *2.1. Skivemetoden.*

Denne metoden går ut på at vi deler opp romlegemet i en stabel med svært tynne skiver, der hver skive har areal $A$ og konstant tykkelse $dh$. Volumet av hver skive blir da $dV = A \cdot dh$. Samlet volum av hele romlegemet blir da

$$V = \int dV = \int A \cdot dh \,.$$

Hvordan dette gjøres i praksis, avhenger av hvordan legemet er plassert i rommet og hvordan vi kutter legemet opp i skiver.

### 2.1.1.Rotasjonssymmetri om *x*-aksen.




Figuren til venstre viser et legeme som framkommer ved at grafen til $y = f(x)$, linjene $x = a$ og $x = b$ roterer om $x$-aksen. Vi ønsker å finne volumet av dette legemet. Det gjør vi ved å kutte det opp i skiver vinkelrett på $x$-aksen slik figuren til venstre viser. Arealet av en snittflate i avstand $x$ fra origo blir

$$A = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi \left( f(x) \right)^2 .$$

Skivene har tykkelse $\Delta x$, som er svært liten. Volumet av hver skive blir da tilnærmet

$$\Delta V \approx A \cdot \Delta x = \pi \left( f(x) \right)^2 \Delta x \,.$$

Så finner vi volumet av hele legemet ved å summere bidragene fra alle de tynne skivene:

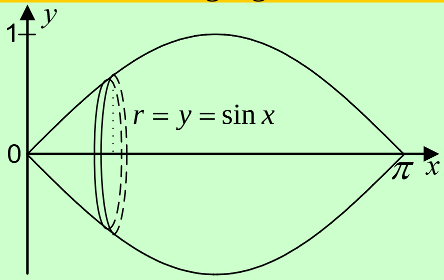
$$V \approx \sum \Delta V \approx \sum \pi \left( f(x) \right)^2 \Delta x \,.$$

Jo tynnere skivene er, jo bedre blir denne tilnærmelsen. Når $\Delta x \to 0$, blir

$$V = \int_a^b \pi \left( f(x) \right)^2 dx \,.$$

Dette er den grunnleggende formelen for beregning av volum for et legeme som roterer om $x$-aksen.

***Eksempel 2.1*: ** Beregn volumet av det legemet som framkommer når grafen til $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, roterer en gang om $x$-aksen.




*Løsning*: Volumet blir

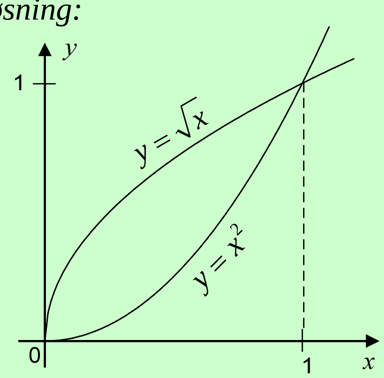
$$V = \int_{x=0}^{x=\pi} \pi r^2 dx = \int_0^{\pi} \pi (\sin x)^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi^2 .$$

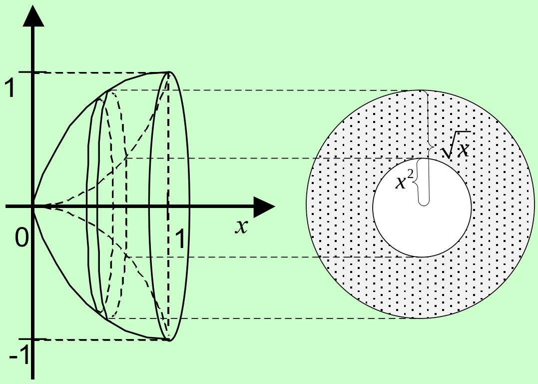
Integrasjonen er foretatt med dataverktøy. Dersom integrasjonen skal utføres for hand, anbefales omformingen

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x)) .$$

***Eksempel 2.2*: ** Beregn volumet av det legemet som framkommer når flata som avgrenses av $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2$ roterer en gang om $x$-aksen.

*Løsning:*




Ovenfor til venstre ser du grafene til $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2$. Ovenfor til høyre ser du en skisse av det rotasjonslegemet som framkommer, sammen med en av snittskivene.

Vi merker oss først at grafene skjærer hverandre når

$$\sqrt{x} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 .$$

Det er kanskje mest naturlig å beregne volumet av den kalotten som dannes når grafen til $f(x) = \sqrt{x}$ roteres om $x$-aksen, avgrenset av linja $x = 1$, og deretter trekke fra det volumet som fjernes inni kalotten når grafen til $g(x) = x^2$ roteres om $x$-aksen. Vi får da:

$$V = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \int_0^1 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \int_0^1 \pi x dx - \int_0^1 \pi x^4 dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \tfrac{3}{10}\pi .$$

Vi kan også resonnere slik: Snittskiva i avstand $x$ fra origo har ytre radius $R = \sqrt{x}$. Men det er et hull i skiva med radius $r = x^2$. Arealet av skiva (fratrukket arealet av hullet) blir da

$$A(x) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right) = \pi\left(x - x^4\right).$$

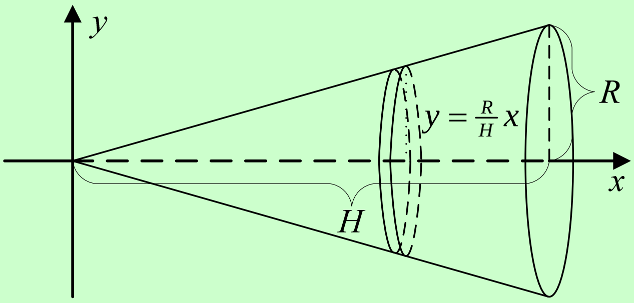
Da blir volumet av legemet

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi\left(x - x^4\right) dx = \tfrac{3}{10}\pi .$$

Noen ganger blir vi bedt om å finne en formel for volumet av et gitt omdreiningslegeme. Da må vi først plassere legemet på en fornuftig måte i koordinatsystemet slik neste eksempel viser.

***Eksempel 2.3:*** Utled formelen for volumet av en rett kjegle med høyde *H* og sirkulær grunnflate med radius *R*.

*Løsning:* Vi tenker oss at kjeglen framkommer ved at den rette linja $y=\frac{R}{H}x$ roterer en gang om *x*-aksen slik figuren nedenfor viser.




Ei snittflate vinkelrett på *x*-aksen i avstand *x* fra origo har da areal

$$A=\pi y^2=\pi\left(\tfrac{R}{H}x\right)^2=\pi\tfrac{R^2}{H^2}x^2,$$

slik at volumet av ei tynn skive med tykkelse *dx* blir

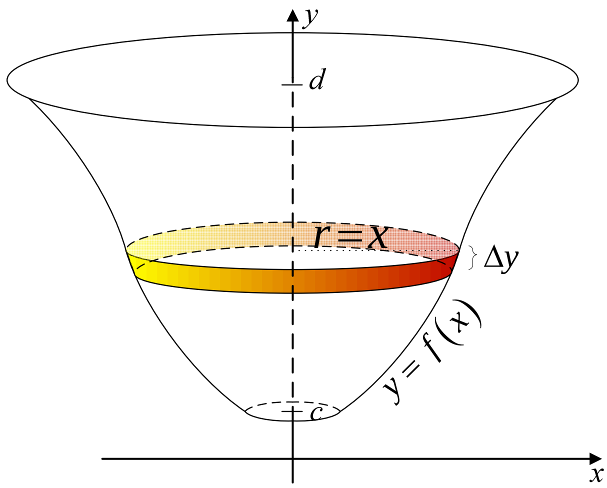
$$dV=A\cdot dx=\pi\tfrac{R^2}{H^2}x^2dx.$$

Kjeglas volum blir da

$$V=\int_{x=0}^{x=H}dV=\int_0^H\pi\tfrac{R^2}{H^2}x^2\,dx=\pi\tfrac{R^2}{H^2}\cdot\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^H=\tfrac{1}{3}\pi\tfrac{R^2}{H^2}\left(H^3-0^3\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}\pi R^2H}}.$$

Oppgave 2.1.

## 2.1.2. Rotasjonssymmetri om *y*-aksen.




Vi benytter samme resonnement som ved rotasjonssymmetri om *x*-aksen, men nå stabler vi skivene oppå hverandre. Hver skive får tykkelse $\Delta y$, mens radien i skiva blir *x*. Volumet av hver skive blir

$$\Delta V\approx\pi x^2\Delta y,$$

slik at volumet av hele legemet blir

$$V=\int_{y=c}^{y=d}dV=\int_{y=c}^{y=d}\pi x^2dy.$$

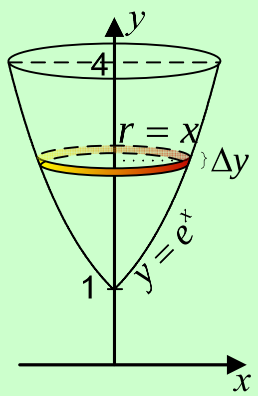
Videre må vi sørge for at *x* uttrykkes som en funksjon av *y*:

$$y=f(x)\quad\Leftrightarrow\quad x=f^{-1}(y).$$

La oss illustrere metoden med et eksempel:

***Eksempel 2.4*:** Bestem volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når grafen til $f(x) = e^x$, $0 \le x \le \ln 4$ og linja $y = 4$ roterer en gang rundt *y*-aksen.

*Løsning*: Situasjonen er illustrert nedenfor til venstre:




Her er

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y .$$

Ei skive med tykkelse $\Delta y$ i avstand *y* fra *x*-aksen har da volum

$$\Delta V = \pi x^2 \Delta y = \pi(\ln y)^2 \Delta y$$

slik at volumet av hele legemet blir

$$V = \int_1^4 \pi(\ln y)^2 \, dy = \underline{\underline{\pi\left(16(\ln 2)^2 - 16\ln 2 + 6\right)}}$$

der integrasjonen er utført med dataverktøy.
Grensene for integralet blir

$$e^0 = 1 \text{ og } e^{\ln 4} = 4 .$$

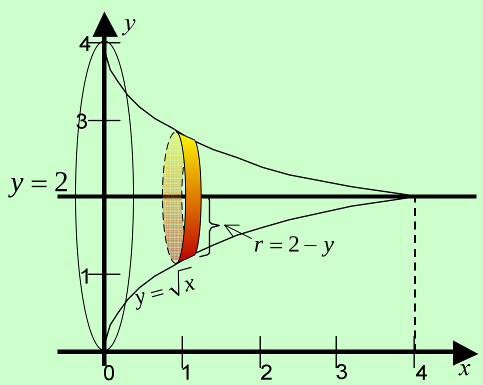
Oppgave 2.2.

## 2.1.3. Rotasjon om en akse parallell med en koordinat-akse.

Hvis du har forstått hvordan vi kutter opp rotasjonslegemer i skiver, og har vent deg til å lage gode figurer, vil du ganske sikkert også klare å beregne volumet av legemer som roterer om akser parallelle med koordinataksene. Istedenfor å sette opp generelle formler, skal vi heller se på et par eksempler.

***Eksempel 2.5*:** Ei flate avgrenses av grafen til $f(x) = \sqrt{x}$, *y*-aksen, og linja $y = 2$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om linja $y = 2$.

*Løsning:* Figuren nedenfor illustrerer situasjonen:




Vi kutter opp legemet i skiver med tykkelse $\Delta x$ vinkelrett på rotasjonsaksen. Ei skive i avstand *x* fra *y*-aksen får da radius

$$r = 2 - y = 2 - \sqrt{x} .$$

Volumet av ei slik skive blir

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta x = \pi\left(2 - \sqrt{x}\right)^2 \Delta x = \pi\left(4 - 4\sqrt{x} + x\right)\Delta x .$$

Vi får øvre grense for integralet når

$$\sqrt{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 .$$

Da blir

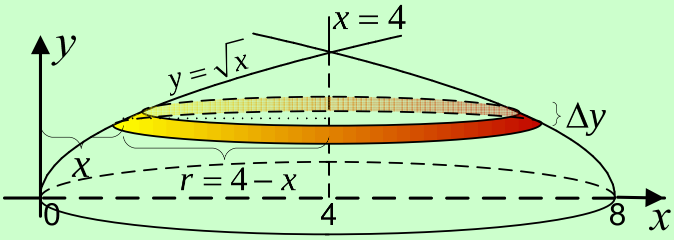
$$V = \int_0^4 \pi\left(4 - 4\cdot x^{\frac{1}{2}} + x\right)dx = \pi\left[4x - 4\cdot\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi\left(4\cdot 4 - \tfrac{8}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}\cdot 4^2 - 0\right)$$

$$= \pi\left(16 - \tfrac{8}{3}\cdot\sqrt{4}^3 + 8\right) = \underline{\underline{\tfrac{8}{3}\pi}}$$

Så tar vi et eksempel med rotasjon rundt en akse parallell med *y*-aksen.

***Eksempel 2.6*****:** Ei flate avgrenses av grafen til $f(x)=\sqrt{x}$, $x$-aksen, og linja $x=4$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om linja $x=4$.

*Løsning:* Figuren nedenfor illustrerer situasjonen:




Vi kutter opp legemet i skiver med tykkelse $\Delta y$ vinkelrett på rotasjonsaksen. Ei skive i avstand $y$ fra $x$-aksen får da radius

$$r = 4 - x = 4 - y^2$$

fordi

$$y=\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2 .$$

Volumet av ei slik skive blir

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta y = \pi\left(4-y^2\right)^2 \Delta y = \pi\left(16-8y^2+y^4\right)\Delta y .$$

Nedre grense for integralet er åpenbart lik null. Vi finner øvre grense for integralet når grafen til $y=\sqrt{x}$ skjærer linja $x=4$, d.v.s. når $y=\sqrt{4}=2$. Volumet av hele legemet blir da

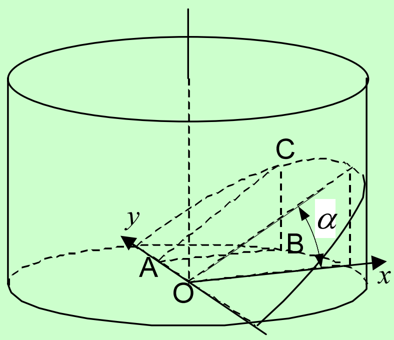
$$V=\int_0^2 \pi\left(16-8y^2+y^4\right)dy = \pi\left[16y-\tfrac{8}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \pi\left(16\cdot 2-\tfrac{8}{3}\cdot 2^3+\tfrac{1}{5}\cdot 2^5-0\right)=\underline{\underline{\tfrac{256}{15}\pi}} .$$

Oppgave 2.3.

## 2.1.4. Mer generelle problemstillinger.

Hittil har alle legemene vært rotasjons-symmetriske, og snittene har vært lagt vinkelrett på rotasjonsaksen. Men skivemetoden kan brukes i mer generelle situasjoner. Da er det ikke alltid like innlysende hvordan snittene skal lagges. Det illustreres av neste eksempel.

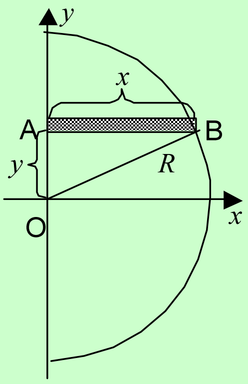
***Eksempel 2.7*****:** En kile skjæres ut av en rett sylinder ved hjelp av to plan som danner en vinkel $\alpha$ med hverandre. Sylinderaksen står vinkelrett på det ene planet og vinkelrett på planenes skjæringslinje. Finn volumet av kilen uttrykt ved vinkelen $\alpha$ og sylinderens radius $R$.




*Løsning*: Situasjonen er illustrert på figuren til venstre. Der ser du sylinderen med de to snittplanene, som danner vinkelen $\alpha$ med hverandre.

Legg $y$-aksen langs snittlinjen mellom planene, og $x$-aksen vinkelrett på $y$-aksen som vist på figuren. Så legger vi snittplan vinkelrett på $y$-aksen. Trekanten ABC er et slikt snittplan. Legg merke til at

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\cdot\tan\alpha .$$




Til venstre ser du grunnflaten i kilen, med snittlinja AB (der C ligger like over B). Et lite volumelement som har snittplanet ABC som grunnplan og tykkelse *dy* er skravert.
Av figuren ser du at

$$\mathrm{AB} = x = \sqrt{R^2 - y^2}\ .$$

Arealet av trekanten blir da

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC} = \tfrac{1}{2}x\cdot x\tan\alpha = \tfrac{1}{2}x^2\tan\alpha = \tfrac{1}{2}\left(R^2 - y^2\right)\tan\alpha\ .$$

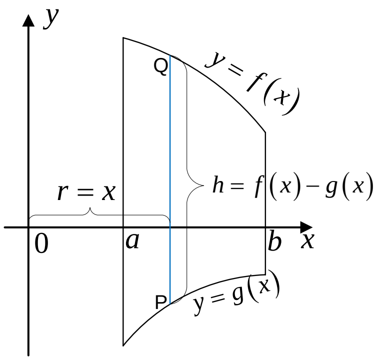
Denne trekanten er nå grunnflate i ei skive med tykkelse $\Delta y$.
Volumet av hele kilen blir da

$$V = \int_{-R}^{R} A\cdot dy = \int_{-R}^{R}\tfrac{1}{2}\left(R^2 - y^2\right)\tan\alpha\cdot dy = \tfrac{1}{2}\tan\alpha\cdot\left[R^2 y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_{-R}^{R}$$

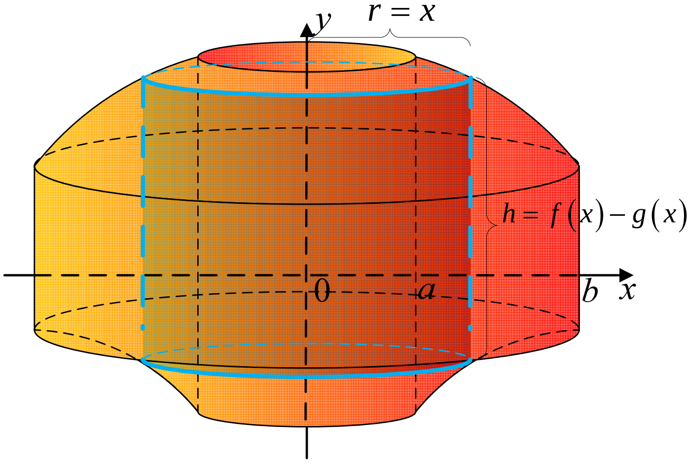
$$= \tfrac{1}{2}\tan\alpha\left(\left(R^2\cdot R - \tfrac{1}{3}R^3\right) - \left(R^2\cdot(-R) - \tfrac{1}{3}(-R)^3\right)\right) = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}R^3\tan\alpha}}$$

## 2.2. Sylinderskall-metoden.

Mens skivemetoden i prinsippet kan brukes på ethvert legeme, kan *sylinderskall-metoden* kun brukes for rotasjons-symmetriske legemer. Jeg skal illustrere ideen bak metoden i en relativt generell situasjon der vi har et legeme som er rotasjonssymmetrisk med *y*-aksen som symmetriakse.




Vi starter med ei flate som avgrenses av grafene til to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, og av de rette linjene $x = a$ og $x = b$. Se figuren til venstre. Så merker vi av ei rett linje PQ i flata parallell med *y*-aksen, og lar flata rotere om *y*-aksen. Da får vi den situasjonen som er skissert nedenfor.




Den rette linja PQ vil under rotasjonen danne en sylinderflate med radius $r = x$ og høyde

$$h = f(x) - g(x)$$

der det er forutsatt at $f(x) > g(x)$.
Arealet av denne sylinderflata blir

$$A = 2\pi r\cdot h = 2\pi x\left(f(x) - g(x)\right).$$

Så kommer poenget: Utenpå denne sylinderflata legger vi et *tynt* sjikt (et *sylinderskall*) med tykkelse $\Delta r = \Delta x$.
Dette sylinderskallet vil da få volum

$$\Delta V = A\cdot\Delta x$$

$$= 2\pi x\left(f(x) - g(x)\right)\cdot\Delta x$$

Volumet av hele legemet blir da summen av volumene til alle sylinderskallene. I praksis vil vi erstatte $\Delta x$ med *dx*, og integrere fra det innerste skallet som har radius *a* til det ytterste skallet som har radius *b*, og får at:

Volumet blir

$$V = \int_a^b 2\pi x\big(f(x) - g(x)\big)dx\,.$$

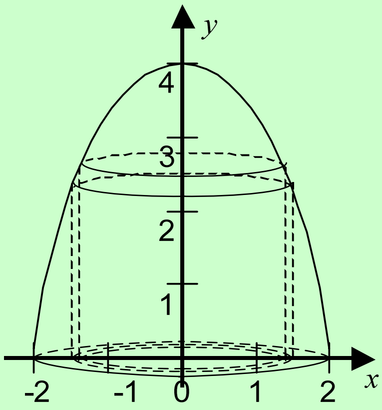
La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

***Eksempel 2.8***: Ei flate avgrenses av grafen til

$$f(x) = 4 - x^2\,,$$

*x*-aksen og *y*-aksen. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om *y*-aksen.

*Løsning*: Situasjonen er illustrert nedenfor.




Vi ser at høyden av sylinderskallet blir

$$h = f(x) = 4 - x^2\,.$$

Nedre grense for integrasjonen er åpenbart $x = 0$, og øvre grense for integrasjon blir når

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,.$$

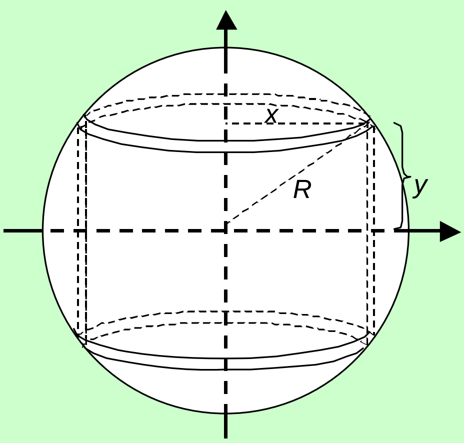
Da blir volumet

$$V = \int_0^2 2\pi x \cdot h \cdot dx = \int_0^2 2\pi x\left(4 - x^2\right)dx = \int_0^2 2\pi\left(4x - x^3\right)dx$$

$$= 2\pi\left[2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\pi\left(2\cdot 2^2 - \tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - 0\right) = \underline{\underline{8\pi}}$$

***Eksempel 2.9***: Bruk sylinderskall-metoden til å utlede formelen for volumet av ei kule med radius *R*.

*Løsning:*




Figuren viser at et sylinderskall med radius *x* har en høyde

$$h = 2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Volumet av sylinderskallet blir

$$\Delta V = 2\pi x \cdot h \cdot \Delta x = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\cdot \Delta x$$

$$= 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\cdot \Delta x$$

Volumet av hele kula blir

$$V = \int_{x=0}^{x=R} dV = \int_0^R 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}dx = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}\pi R^3}}\,.$$

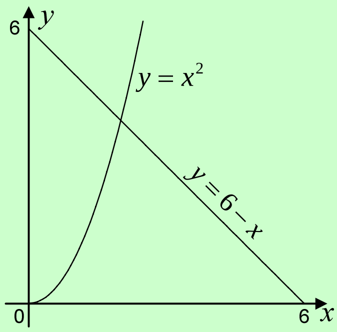
Integralet løses med substitusjonen $u = R^2 - x^2$.

**Oppgave 2.4**.

Så skal vi se et eksempel på rotasjon om *x*-aksen.

***Eksempel 2.10*:** Ei flate avgrenses av *x*-aksen og av grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 6 - x$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om *x*-aksen.

*Løsning*:




Figuren til venstre viser grafene til de to funksjonene. De to grafene skjærer hverandre når

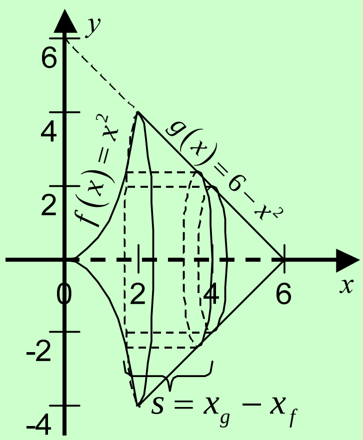
$$x^2 = 6 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Vi ser av figuren at vi må bruke $x = 2$.
Da er

$$y = x^2 = 2^2 = 4.$$

Så lar vi flata avgrenset av grafene og *x*-aksen rotere om *x*-aksen. Da oppstår situasjonen nedenfor:




Vi får nå *liggende* sylindre med radius *y* og lengder

$$s = x_g - x_f$$

der $x_g$ ligger på grafen til $y = g(x) = x^2$ og $x_f$ ligger på grafen til $y = f(x) = 6 - x$. Vi får at

$$y = {x_g}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_g = \sqrt{y}$$

og

$$y = 6 - x_f \quad \Leftrightarrow \quad x_f = 6 - y.$$

Da blir

$$s = x_g - x_f = 6 - y - \sqrt{y}.$$

Volumet av et sylinderskall blir da

$$\Delta V = 2\pi y \cdot s \cdot \Delta y = 2\pi y\left(6 - y - \sqrt{y}\right)\Delta y.$$

Volumet til hele legemet blir

$$V = \int_{y=0}^{y=4} \Delta V = \int_0^4 2\pi y\left(6 - y - \sqrt{y}\right)dy = \int_0^4 2\pi\left(6y - y^2 - y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$

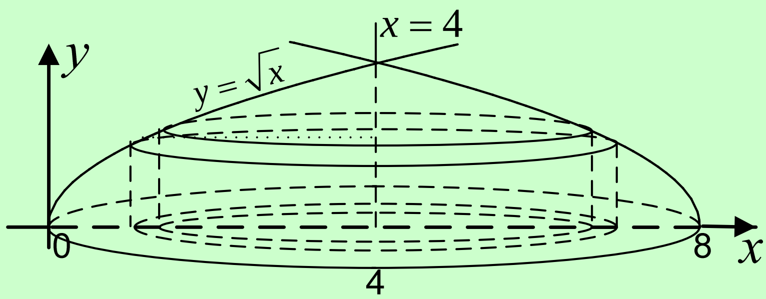
$$= 2\pi\left[3y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = 2\pi\left(3\cdot 4^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - \tfrac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}} - 0\right) = \underline{\underline{\tfrac{416}{15}\pi}}$$

**Oppgave 2.5**.

Det er vanlig at volumberegninger kan utføres med både skive- og sylinderskall-metoden når vi har rotasjonssymmetriske legemer. For å illustrere dette, skal vi løse problemet i Eksempel 2.6. på nytt, men nå med sylinderskall-metoden.

***Eksempel 2.11*****:** Ei flate avgrenses av grafen til $f(x)=\sqrt{x}$, $x$-aksen, og linja $x=4$. Finn volumet av det legemet som framkommer når denne flata roterer om linja $x=4$.

*Løsning:* Figuren nedenfor illustrerer situasjonen:




Radien i sylinderflata blir

$$r=4-x,$$

mens høyden blir

$$y=\sqrt{x}.$$

Da blir volumet av legemet

$$V=\int_{x=0}^{x=4}2\pi r\cdot h\cdot dx=2\pi\int_0^4(4-x)\sqrt{x}dx=2\pi\int_0^4\left(4x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=2\pi\left[4\cdot\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$=2\pi\left(\tfrac{8}{3}\cdot4^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{5}\cdot4^{\frac{5}{2}}-0\right)=2\pi\left(\tfrac{8}{3}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{5}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{5}{2}}\right)=2\pi\left(\tfrac{8}{3}\cdot2^3-\tfrac{2}{5}\cdot2^5\right)=2\pi\left(\tfrac{64}{3}-\tfrac{64}{5}\right)$$

$$=\underline{\underline{\tfrac{256}{15}\pi}}$$

Jeg håper at disse eksemplene har overbevist deg om at slike problemer løses ikke ved å plukke fram en eller annen formel fra en formelsamling. Du må forstå prinsippene bak metodene, og du må tegne en brukbar figur slik at du ser hvordan legemene ser ut. Da først kan du sette opp de integralene som må til for å løse problemene.