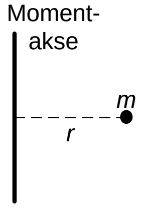
6. Beregning av treghetsmoment.

6.1. Definisjoner.

Først de grunnleggende definisjonene:



La en liten punktformet partikkel med masse *m* ha en avstand *r* fra en akse. Da er denne partikkelens treghetsmoment om aksen definert ved

$$I = m \cdot r^2 .$$

Aksen kalles gjerne for *momentakse*.

Vi kan tenke oss at et legeme består av mange slike partikler. Da får vi:

Dersom et legeme består av *n* partikler der partikkel nr *i* har masse m_i og avstand r_i fra en momentakse *A*, er legemets ***treghetsmoment*** om denne momentaksen

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Legg merke til at treghetsmomentet er ikke en egenskap ved et legeme slik for eksempel *masse* er. Treghetsmomentet avhenger av legemets posisjon i forhold til momentaksen.

I praksis er det vanligvis ikke mulig å foreta en summering slik definisjonen ovenfor angir. Vi benytter heller integrasjon. Da antar vi at legemet er bygd opp av småbiter, der en bit med masse *dm* har avstand *r* fra aksen. Da får vi:

Treghetsmomentet til et legeme om en akse *A* er

$$I_A = \int r^2 dm$$

der *r* er avstanden fra et masse-element *dm* til aksen *A*, og integrasjonen tas over hele legemet.

Denne definisjonen fører til at vi generelt må integrere i rommet, noe som krever kjennskap til trippelintegral. Vi skal imidlertid begrense oss til spesielle situasjoner der vi klarer oss med vanlige enkelt-integral. Vi skal også se på et par hjelpesetninger som vil forenkle beregningen av treghetsmoment.

6.2. Treghetsmomentet for en linje i et plan.

Vi skal nå beregne treghetsmomentet for et legeme som kan betraktes som en tynn linje i et plan. Vi skal la momentaksen stå vinkelrett på legemets plan. Vi skal forutsette at det tynne legemet er *homogent*, noe som bl.a. innebærer at tettheten er konstant. For et slikt legeme er det naturlig å uttrykke tettheten i kg/m. Dersom legemet har lengde *L* og masse *m*, og vi plukker ut et tilfeldig lite element med lengde *ds* og masse *dm*, er tettheten

$$\rho = \frac{m}{L} = \frac{dm}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{L} ds \,.$$

Da blir treghetsmomentet om en akse vinkelrett på legemets plan

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{m}{L} ds = \frac{m}{L} \int r^2 ds$$

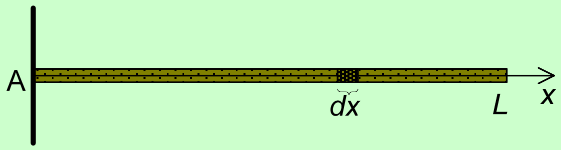
der *r* er avstanden fra aksen til et bue-element *ds*, og vi integrerer over hele legemet.

Eksempel 6.1: Finn treghetsmomentet for en tynn stav med lengde *L* og masse *m* om disse aksene:

a) Aksen står vinkelrett på staven gjennom stavens ene ende A.
b) Aksen står vinkelrett på staven gjennom stavens midtpunkt C (stavens massesenter).

Løsning:

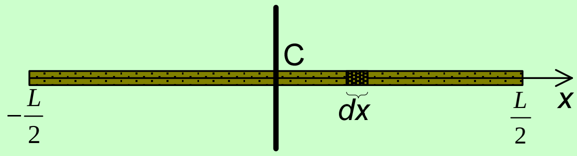
a) Situasjonen er illustrert nedenfor:



Her er *dx* et lite masse-element på staven, mens *x* er avstanden fra masse-elementet til aksen. Da blir treghetsmomentet om aksen gjennom A:

$$I_A = \frac{m}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{m}{L}\cdot\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^L = \frac{m}{L}\cdot\tfrac{1}{3}L^3 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}mL^2}}\,.$$

b) Situasjonen er illustrert nedenfor:



Nå blir treghetsmomentet om aksen gjennom C:

$$I_C = \frac{m}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{m}{L}\cdot\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L}\cdot\tfrac{1}{3}\left(\left(\tfrac{L}{2}\right)^3 - \left(-\tfrac{L}{2}\right)^3\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{12}mL^2}}\,.$$

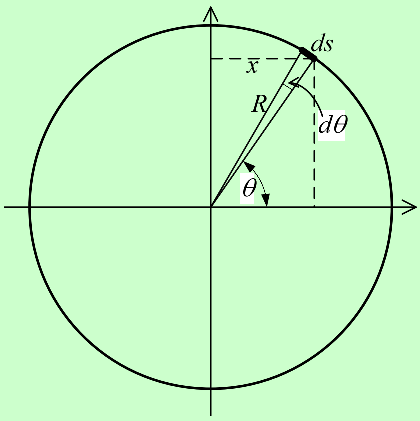
Vi skal senere vise at når vi kjenner treghetsmomentet til et legeme om legemets massesenter, kan vi bruke ***Steiners setning*** (***parallellakse-setningen***) til å finne legemets treghetsmoment om enhver annen akse parallell med aksen gjennom massesenteret.

Neste eksempel er adskillig mer komplisert, og inneholder en integrasjonsteknisk finesse.

Eksempel 6.2: Finn treghetsmomentet for en tynn ring med radius *R* og masse *m* om en akse langs en diameter.

Løsning: Vi vet at lengden av ringen er $L = 2\pi R$. Så plasserer vi ringen med sentrum i origo som vist på figuren til venstre nedenfor, og bruker *y*-aksen som momentakse.

Vi plukker ut et lite bue-element *ds*. Nå blir integrasjonene enklest dersom vi benytter vinkelen θ som integrasjonsvariabel. Av figuren ser vi at $x = R\cos\theta$. Videre vet vi at når vinkler måles i radianer, blir



$$d\theta = \frac{ds}{R} \quad \Leftrightarrow \quad ds = R \cdot d\theta .$$

Da får vi:

$$I = \frac{m}{L}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} x^2 ds = \frac{m}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \left(R\cos\theta\right)^2 \cdot R\,d\theta$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

Integralet løses enklest når vi husker at

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\theta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\theta).$$

Da blir

$$I = \frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta = \frac{mR^2}{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi - \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{4}\cdot\sin(4\pi) - \tfrac{1}{4}\cdot\sin 0\right) = \frac{mR^2}{2\pi}\cdot\pi = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mR^2}}$$

Oppgave 6.1.

6.3. Treghetsmoment for plant legeme.

For et plant legeme (ei *flate*) er det naturlig å uttrykke tettheten i kg/m^2. Dersom legemet er homogent, blir tettheten

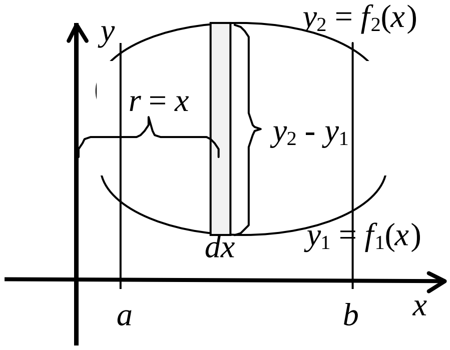
$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{A}dA$$

der *m* og *A* er flatas masse og areal, mens *dm* og *dA* er masse og areal til et lite flate-element. Da blir treghetsmomentet om en akse *A* gitt ved:

$$I_A = \int r^2 dm = \int r^2\left(\frac{m}{A}dA\right) = \frac{m}{A}\int r^2 dA$$

der *r* er avstanden fra flate-elementet til aksen, og vi integrerer over hele flata.

Vi skal i første omgang begrense oss til et spesialtilfelle: Flata avgrenses av grafene til to funksjoner $y_1 = f_1(x)$ og $y_2 = f_2(x)$, og av de to rette linjene $x = a$ og $x = b$. Dessuten skal vi la *y*-aksen være momentakse. Se figuren nedenfor til venstre.



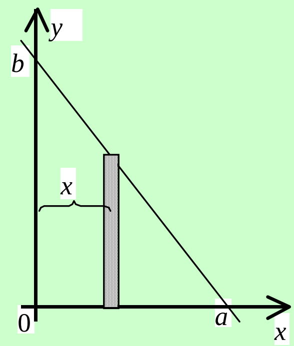
Her merker vi oss at det skraverte flate-elementet med bredde *dx* og høyde $h = y_2 - y_1$ har avstand *x* fra *y*-aksen og areal

$$dA = h \cdot dx = \left(y_2 - y_1\right)dx .$$

Hvis $y_2 > y_1$ når $a \le x \le b$, blir flatas treghetsmoment om *y*-aksen

$$I_y = \frac{m}{A}\int_a^b r^2 dA = \underline{\frac{m}{A}\int_a^b x^2\left(y_2 - y_1\right)dx}$$

Eksempel 6.3: Finn treghetsmomentet til en rettvinklet trekant om en av trekantens kateter.



Løsning:
Setter at trekantens kateter har lengder *a* og *b*. Plasserer trekanten i et koordinatsystem som vist til venstre. Da avgrenses trekanten av koordinataksene og grafen til den rette linja

$$y = -\frac{b}{a}x + b\,.$$

Arealet av trekanten er $A = \frac{1}{2}ab$.
Treghetsmomentet om *y*-aksen blir

$$I_y = \frac{m}{A}\int_0^a x^2\left(y-0\right)dx = \frac{m}{A}\int_0^a x^2\left(-\frac{b}{a}x+b\right)dx = \frac{m}{A}\left(-\frac{b}{a}\int_0^a x^3dx + b\int_0^a x^2dx\right)$$

$$= \frac{m}{A}\left(-\frac{b}{a}\left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^a + b\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a\right) = \frac{m}{\frac{1}{2}ab}\left(-\frac{b}{4a}\cdot a^4 + \frac{b}{3}\cdot a^3\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{6}ma^2}}$$

Hittil har vi kun sett på treghetsmoment om *y*-aksen. Men vi kan finne treghetsmoment om *x*-aksen på samme måte.

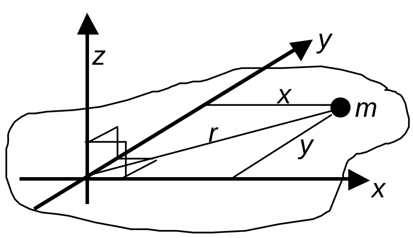
`Oppgave 6.2`. (Du får bruk for resultatene i neste oppgave).

Dersom vi kjenner treghetsmomentene for ei plan flate som ligger i *xy*-planet om både *x*- og *y*-aksen, kan vi finne treghetsmomentet for flata om en akse som står *vinkelrett* på planet gjennom origo ved hjelp av setningen nedenfor:

Setningen om det *polare treghetsmomentet*:
Et plant legeme plasseres i *xy*-planet. Treghetsmomentene om *x*-aksen og om *y*-aksen kalles henholdsvis I_x og I_y. Da blir treghetsmomentet om en akse vinkelrett på det plane legemet gjennom origo

$$I_z = I_x + I_y\,.$$

Bevis:



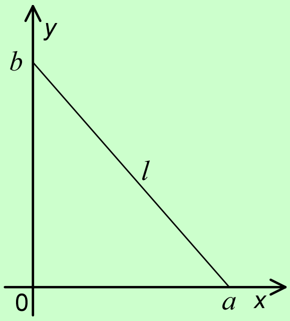
Figuren viser et plant legeme som ligger i *xy*-planet. Avstanden fra origo til et massepunkt m_i er r_i. Av figuren ser vi at $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$.
Da blir treghetsmomentet til det plane legemet om *z*-aksen

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$= \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = \underline{\underline{I_y + I_x}}$$

Nedenfor ser du et eksempel på bruken av denne setningen.

Eksempel 6.4: Finn treghetsmomentet til en rettvinklet trekant om en akse vinkelrett på trekanten gjennom katetenes skjæringspunkt.



Løsning:
Fra Eksempel 3.1 vet vi at treghetsmomentet for trekanten om *y*-aksen er $I_y = \frac{1}{6}ma^2$. En ombytting av *x*- og *y*- aksene gir direkte at treghetsmomentet om *x*-aksen må blir $I_x = \frac{1}{6}mb^2$. Da blir treghetsmomentet om *z*-aksen (en akse vinkelrett på planet gjennom origo)

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{6}ma^2 = \frac{1}{6}m\left(a^2+b^2\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}ml^2}}$$

der den siste omformingen følger direkte av Pytagoras.

Oppgave 6.3.

6.4. Treghetsmoment for rotasjonssymmetrisk legeme.

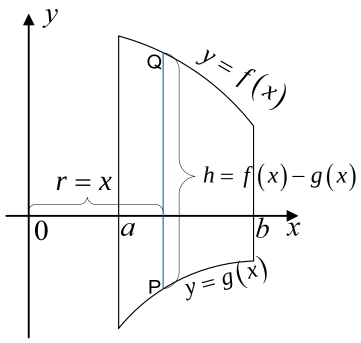
Vi skal igjen forutsette at legemet er *homogent*, slik at tettheten ρ er gitt ved

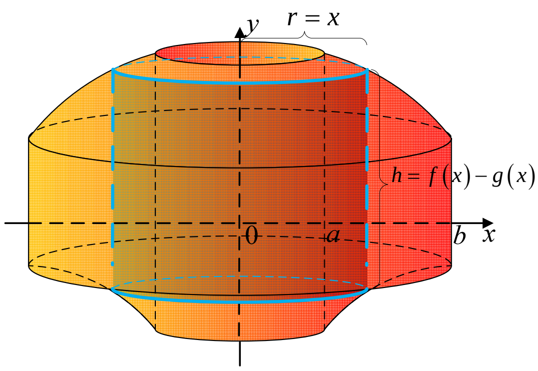
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{V}dV$$

der *m* er massen og *V* er volumet til legemet. Da blir treghetsmomentet til et romlegeme om en akse *A* gitt ved

$$I_A = \int r^2 dm = \int r^2\left(\frac{m}{V}dV\right) = \frac{m}{V}\int r^2 dV$$

der vi må integrere over hele legemet. Generelt vil det kreve et trippel-integral. Men noen ganger kan vi klare oss med vanlige integral. Dette gjelder spesielt hvis legemet er rotasjons-symmetrisk og symmetriaksen er momentakse. Da kan vi beregne treghetsmomentet ved hjelp av *sylinderskallmetoden* som du forhåpentlig kjenner fra før.





For sikkerhets skyld skal vi repetere hovedtrekkene. La ei flate i *xy*-planet være avgrenset av grafene til de to funksjonene $y_1 = f(x)$ og $y_2 = g(x)$, linjene $x = a$ og $x = b$ slik figuren til venstre ovenfor viser. Jeg skaffer meg et rotasjonslegeme med *y*-aksen som symmetriakse ved å rotere denne flata om *y*-aksen. Linja PQ som har avstand *x* fra aksen skaper da ei sylinder-flate med areal

$$A = 2\pi x \cdot h = 2\pi x\big(f(x) - g(x)\big).$$

Utenpå denne sylinderflata legger vi et tynt sjikt med tykkelse *dx*. Da får vi et sylinderskall med volum

$$dV = A \cdot dx = 2\pi x \cdot \big(f(x) - g(x)\big) \cdot dx$$

slik at treghetsmomentet til hele legemet om *y*-aksen blir

$$I_y = \int_{x=a}^{x=b} x^2 \cdot dm = \frac{m}{V}\int_{x=a}^{x=b} x^2 \cdot dV = \frac{m}{V}\int_a^b x^2 \cdot 2\pi x\big(f(x)-g(x)\big)dx$$
$$= \underline{\underline{\frac{2\pi m}{V}\int_a^b x^3\big(f(x)-g(x)\big)dx}}$$

Noen ganger må vi også finne volumet til legemet. Det gjør vi også med sylinderskall-metoden:

$$V = \int_a^b 2\pi x\big(f(x)-g(x)\big)dx\,.$$

Innsetting og forkorting av 2π gir nå at treghetsmomentet om *y*-aksen blir

$$I_y = \underline{\underline{m\cdot\frac{\int_a^b x^3\big(f(x)-g(x)\big)dx}{\int_a^b x\big(f(x)-g(x)\big)dx}}}\,.$$

Prøv selv å sette opp formel for treghetsmomentet om *x*-aksen når *x*-aksen er symmetriakse!

Eksempel 6.5: En rett sylinder har høyde *h* og sirkelformet radius *R*. Finn treghetsmomentet til denne sylinderen om symmetriaksen.

Løsning: Vet at volumet av en sylinder er $V = \pi R^2 h$. I formelen for treghetsmoment settes $f(x) = h$ og $g(x) = 0$, og vi får at treghetsmomentet om *y*-aksen blir

$$I_y = \frac{2\pi m}{V}\int_a^b x^3\big(f(x)-g(x)\big)dx = \frac{2\pi m}{\pi R^2 h}\int_0^R x^3(h-0)dx = \frac{2m}{R^2 h}\cdot h\int_0^R x^3 dx$$
$$= \frac{2m}{R^2}\left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^R = \frac{2m}{R^2}\cdot\tfrac{1}{4}R^4 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mR^2}}$$

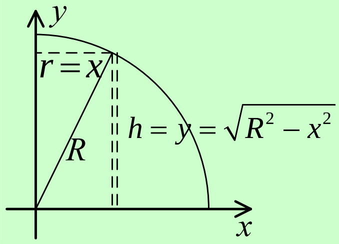
Eksempel 6.6: En rett kjegle har høyde *h* og sirkelformet radius *R*. Finn treghetsmomentet til denne kjeglen om kjeglens symmetriakse.

Løsning: Vet at kjeglen har volum $V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h$. Kjeglen framkommer når flata avgrenset av koordinataksene og grafen til den rette linja $y = -\frac{h}{R}x + h$ roterer om *y*-aksen (se figur til Eksempel 3.1). I formelen for treghetsmoment settes da $f(x) = -\frac{h}{R}x + h$ og $g(x) = 0$, og vi får at treghetsmomentet om *y*-aksen blir

$$I_y = \frac{2\pi m}{V}\int_a^b x^3\big(f(x)-g(x)\big)dx = \frac{2\pi m}{\tfrac{1}{3}\pi R^2 h}\int_0^R x^3\left(-\frac{h}{R}x + h\right)dx$$
$$= \frac{6m}{R^2 h}\left(-\frac{R}{h}\int x^4 dx + h\int x^3 dx\right) = \frac{6m}{R^2 h}\left(-\frac{h}{R}\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^R + h\left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^R\right)$$
$$= \frac{6m}{R^2 h}\left(-\tfrac{1}{5}hR^4 + \tfrac{1}{4}hR^4\right) = \underline{\underline{\tfrac{3}{10}mR^2}}$$

Eksempel 6.7: Finn treghetsmomentet for ei kule med masse *m* og radius *R* om en akse gjennom kulas sentrum.

Løsning:



Figuren til venstre viser den sirkelbuen som roterer om *y*-aksen, og som danner øvre halvkule. Nedre halvkule blir helt lik. Da blir treghetsmomentet om *y*-aksen:

$$I_y = \frac{2\pi m}{V}\cdot\int_0^R x^3\left(2\sqrt{R^2-x^2}\right)dx$$
$$= \frac{2\pi m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R x^2\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)(2x\,dx)$$

Her har jeg satt inn at volumet av ei kule er $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, og har husket at når nedre halvkule tas med blir høyden $h = 2\sqrt{R^2-x^2}$. Videre har jeg forberedt substitusjonen

$$u = R^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} du = -2x\,dx \\ x^2 = R^2 - u \end{cases}$$

Jeg setter inn, forkorter, og benytter at når $x = 0$ er $u = R^2$, og når $x = R$ er $u = 0$. Da blir

$$I_y = \frac{3m}{2R^3}\int_{R^2}^{0}\left(R^2-u\right)\left(\sqrt{u}\right)(-du) = \frac{3m}{2R^3}\int_0^{R^2}\left(R^2u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right)du = \frac{3m}{2R^3}\left(\left[R^2\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^{R^2}\right)$$
$$= \frac{3m}{2R^3}\left(R^2\cdot\tfrac{2}{3}R^3 - \tfrac{2}{5}R^5\right) = \frac{3m}{2R^3}\cdot\tfrac{4}{15}R^5 = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}mR^2}}$$

Oppgave 6.4.

6.5. Sammensatte legemer.

Anta at et legeme er satt sammen av to andre legemer som har treghetsmoment

$$I_1 = \sum_{V_1} r_i^2 m_i \ \text{ og } \ I_2 = \sum_{V_2} r_i^2 m_i$$

om samme momentakse. Det sammensatte legemet får da treghetsmoment

$$I = \sum_{V_1+V_2} r_i^2 m_i = \sum_{V_1} r_i^2 m_i + \sum_{V_2} r_i^2 m_i = I_1 + I_2 \,.$$

Denne formelen kan lett utvides til flere del-legemer.

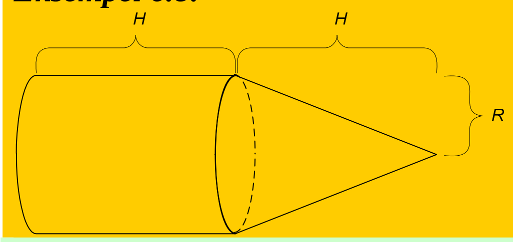
Vi kan altså legge sammen treghetsmomentene til de to legemene. I prinsippet er dette enkelt. I praksis kan det oppstå problemer fordi den formelen for treghetsmomentet til det sammensatte legemet som vi skal fram til, inneholder massen til *hele* legemet, mens formlene for treghetsmomentene til del-legemene inneholder massene til disse del-legemene. Dersom del-legemene har samme tetthet kan vi løse dette problemet slik:

La m_1 og V_1 være henholdsvis masse og volum til del-legeme 1, mens *m* og *V* er masse og volum til hele det sammensatte legemet. Da er

$$\rho = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m\cdot\frac{V_1}{V}\,.$$

På denne måten finner vi massen til hvert del-legeme uttrykt ved massen til hele legemet.

Eksempel 6.8:



Et legeme med masse *m* består av en rett sylinder med radius *R* og høyde *H*, som har en rett kjegle med radius *R* og høyde *H* festet til toppflaten. Sylinderen og kjeglen har felles symmetriakse. Finn treghetsmomentet til legemet om symmetriaksen.

Løsning: Sylinderen har volum $V_S = \pi R^2 H$, mens kjeglen har volum $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Samlet volum for hele legemet er da

$$V = V_S + V_K = \pi R^2 H + \tfrac{1}{3}\pi R^2 H = \underline{\tfrac{4}{3}\pi R^2 H}\,.$$

La *m* være massen til det sammensatte legemet. Sylinderens masse blir da

$$m_S = m \cdot \frac{V_S}{V} = m \cdot \frac{\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^2 H} = \underline{\tfrac{3}{4} m}\,,$$

mens kjeglens masse blir

$$m_K = m \cdot \frac{V_K}{V} = m \cdot \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^2 H} = \underline{\tfrac{1}{4} m}\,.$$

Vi har allerede funnet at sylinderens treghetsmoment om symmetriaksen er

$$I_S = \tfrac{1}{2} m_S R^2\,,$$

og at kjeglens treghetsmoment om symmetriaksen er

$$I_K = \tfrac{3}{10} m_K R^2\,.$$

Legemets treghetsmoment om symmetriaksen blir da

$$I = I_S + I_K = \tfrac{1}{2} m_S R^2 + \tfrac{3}{10} m_K R^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4} mR^2 + \tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{1}{4} mR^2 = \underline{\underline{\tfrac{9}{20} mR^2}}\,.$$

Vi kan bruke samme prinsipp dersom vi fjerner en bit fra et legeme. Dersom et legeme med treghetsmoment *I* framkommer ved at vi fjerner en bit med treghetsmoment I_1 fra et annet legeme med treghetsmoment I_2, blir

$$I = I_2 - I_1\,.$$

Det forutsettes at alle treghetsmomentene regnes om samme akse.

Eksempel 6.9: Et legeme med masse *m* framkommer ved at en halvkuleformet hulning med radius *R* freses ut av toppflaten i en sylinder med høyde $H = 2R$ og radius *R*. Halvkula og sylinderen har felles symmetriakse. Finn treghetsmomentet til dette legemet om symmetriaksen.

Løsning: Volumet til legemet er

$$V = V_S - V_{\frac{1}{2}K} = \pi R^2 H - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 \cdot 2R - \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \underline{\tfrac{4}{3}\pi R^3}\,.$$

Massen til sylinderen (før utfresingen av halvkula) var

$$m_S = m \cdot \frac{V_S}{V} = m \cdot \frac{\pi R^2 \cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\tfrac{3}{2} m}\,,$$

mens massen av den utfreste halvkula er

$$m_{\frac{1}{2}K} = m \cdot \frac{V_{\frac{1}{2}K}}{V} = m \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\tfrac{1}{2}m}.$$

Treghetsmomentet til sylinderen (før utfresingen av halvkula) var

$$I_S = \tfrac{1}{2} m_S R^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} m \cdot R^2 = \underline{\tfrac{3}{4} m R^2}.$$

Halvkula har halvparten så stort treghetsmoment (om symmetriaksen) som ei hel kule. Men massen til halvkula er også halvparten så stor som massen til ei hel kule. Dermed får vi at

$$I_{\frac{1}{2}K} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{5} m_k R^2 = \tfrac{2}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{2} m_k\right) R^2 = \tfrac{2}{5} \cdot \left(m_{\frac{1}{2}K}\right) \cdot R^2 = \tfrac{2}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{2} m\right) \cdot R^2 = \underline{\tfrac{1}{5} m R^2}.$$

Alt i alt blir nå treghetsmomentet til legemet vårt om symmetriaksen

$$I = I_S - I_{\frac{1}{2}K} = \tfrac{3}{4} m R^2 - \tfrac{1}{5} m R^2 = \underline{\underline{\tfrac{11}{20} m R^2}}.$$

Eksempel 6.10: Bruk dette prinsippet til å finne formelen for treghetsmomentet til en hul sylinder med masse m, indre radius R_1 og ytre radius R_2.

Løsning: Vi tenker oss at den hule sylinderen framkommer ved at vi starter med en massiv sylinder med volum $V_1 = \pi R_1{}^2 H$ og treghetsmoment $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1{}^2$. Så freser vi ut en sylinder med volum $V_2 = \pi R_2{}^2 H$ og treghetsmoment $I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2{}^2$. Når massen til den hule sylinderen er m, blir massene til disse to sylinderne:

$$m_1 = m \cdot \frac{V_1}{V} = m \cdot \frac{\pi R_1{}^2 H}{\pi R_2{}^2 H - \pi R_1{}^2 H} = m \cdot \frac{R_1{}^2}{R_2{}^2 - R_1{}^2},$$

$$m_2 = m \cdot \frac{V_2}{V} = m \cdot \frac{\pi R_2{}^2 H}{\pi R_2{}^2 H - \pi R_1{}^2 H} = m \cdot \frac{R_2{}^2}{R_2{}^2 - R_1{}^2}.$$

Da blir treghetsmomentet til den hule sylinderen

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{2} m_2 R_2{}^2 - \tfrac{1}{2} m_1 R_1{}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m R_2{}^2}{R_2{}^2 - R_1{}^2} \cdot R_2{}^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m R_1{}^2}{R_2{}^2 - R_1{}^2} \cdot R_1{}^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m \frac{R_2{}^4 - R_1{}^4}{R_2{}^2 - R_1{}^2} = \tfrac{1}{2} m \frac{\left(R_2{}^2 + R_1{}^2\right)\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)}{R_2{}^2 - R_1{}^2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} m \left(R_2{}^2 + R_1{}^2\right)}}$$

Dette resultatet kan vi også finne ved å benytte framgangsmåten i Eksempel 6.5, og integrere fra R_1 til R_2.

En liten kontroll til slutt: Dersom sylinderveggen er så tynn at $R_1 \approx R_2 = R$, blir treghets-momentet $I = \frac{1}{2} m \left(R^2 + R^2\right) = \underline{\underline{m R^2}}$. Det er jo helt naturlig, siden alle massepunktene da har samme avstand R fra aksen.

Oppgave 6.5.

6.6. Steiners setning (parallellakse-setningen).

Det er vanlig at tabeller oppgir formler for treghetsmoment om en akse gjennom legemets massesenter. Dersom vi har bruk for treghetsmomentet til legemet om en annen akse parallell med aksen gjennom massesenteret, kan vi bruke setningen nedenfor:

Steiners setning (parallellakse-setningen):
La I_C være treghetsmomentet for et legeme med masse m om en akse gjennom massesenteret. La I_P være treghetsmomentet for dette legemet om en annen akse som er parallell med aksen gjennom massesenteret, i avstand D fra denne. Da er

$$I_P = I_C + mD^2$$

Beviset for setningen er litt kronglete, og er dyttet ut i et vedlegg. Vi skal heller se på hvordan setningen kan brukes.

Eksempel 6.11: Vis at resultatene fra Eksempel 6.1 stemmer med Steiners setning.

Løsning: Vi fant at stavens treghetsmoment om massesenteret var $I_C = \frac{1}{12}mL^2$. Steiners setning gir nå at treghetsmomentet om en parallell akse gjennom et endepunkt er

$$I_A = I_C + m \cdot \left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \tfrac{1}{12}mL^2 + \tfrac{1}{4}mL^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}mL^2}}.$$

Dette stemmer med resultatet i Eksempel 6.1.

Eksempel 6.12: Beregn treghetsmomentet til en sylinder om en akse langs sylinderens sidekant, parallelt med symmetriaksen.

Løsning: Siden treghetsmomentet for en sylinder om symmetriaksen er $I_C = \frac{1}{2}mR^2$, og massesenteret ligger på symmetriaksen, blir treghetsmomentet om en akse langs en sidekant i avstand R fra symmetriaksen

$$I_P = I_C + m \cdot R^2 = \tfrac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}mR^2}}.$$

Oppgave 6.6.