4. Areal av rotasjonsflater.

I notatet om buelengde har vi sett at lengden av et lite bue-element Δs er gitt ved

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 .$$

Når vi lar $\Delta s \to 0$, kan vi erstatte Δs med *ds*. Da kan uttrykket for lengden av bue-elementet omformes til

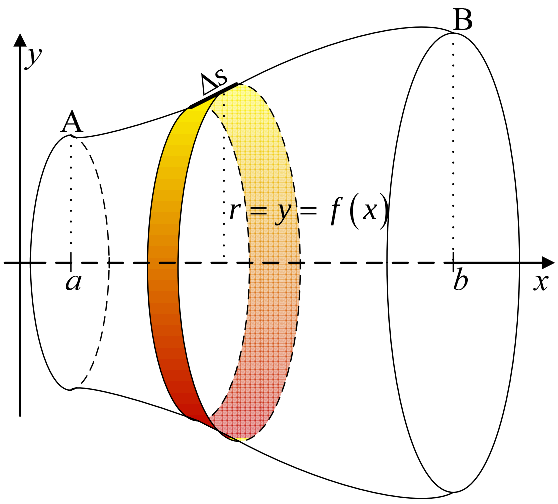
$$ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

når vi forutsetter at $y = f(x)$. Dersom *f* er strengt voksende eller strengt avtakende, og vi har den inverse funksjonen $x = f^{-1}(y)$, kan uttrykket for lengden av bue-elementet omformes til

$$ds = \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy .$$

Vi skal nå vise hvordan vi kan benytte disse uttrykkene til å beregne arealet av den flaten som dannes når en buen roterer om en koordinat-akse.

4.1. Rotasjon om *x*-aksen.



Figuren til venstre viser hva som skjer når grafen til funksjonen

$$y = f(x)$$

roterer en gang om *x*-aksen. Vi tar for oss et tilfeldig lite bue-element på grafen. Dette lille bue-elementet vil da rotere i en sirkel med radius

$$r = y = f(x),$$

og vil definere et smalt "belte" med lengde $2\pi y$. Siden "beltet" har bredde Δs, vil "beltets" areal bli

$$\Delta A = 2\pi y \cdot \Delta s .$$

Arealet av den rotasjonsflaten som framkommer når hele grafen fra A til B roterer om *x*-aksen, blir da

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum \Delta A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx .$$

Dersom *f* er strengt voksende slik at det eksisterer en invers funksjon $x = f^{-1}(y)$, kan det noen ganger være mer hensiktsmessig å beregne arealet av rotasjonsflaten med

$$A = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi y \sqrt{1+\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2}\, dy .$$

***Eksempel 4.1*:** Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når grafen til $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, roterer om *x*-aksen.

Løsning: Ved rotasjon om *x*-aksen er radien i rotasjonen lik $y = x^3$. Videre ser vi at

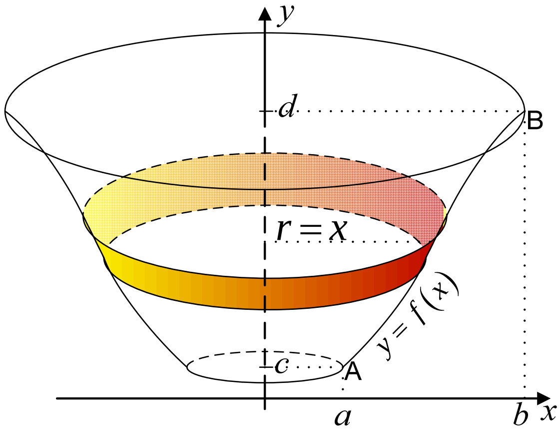
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x^4.$$

Da blir arealet

$$A = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)}}.$$

Integrasjonen er her utført med dataverktøy. Men du kommer greit fram med substitusjonen $u = 1+9x^4$.

4.2. Rotasjon om *y*-aksen.



Figuren til venstre viser hva som skjer når grafen til

$$y = f(x)$$

roterer en gang om *y*-aksen. Som før følger vi et lite bue-element Δs. Radien i den sirkelen som bue-elementet beskriver, blir $r = x$, slik at arealet av beltet blir

$$\Delta A = 2\pi x \cdot \Delta s.$$

Arealet av den rotasjonsflaten som framkommer når hele grafen fra A til B roterer om *y*-aksen, blir da

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum \Delta A = \int_{x=a}^{x=b} dA = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi x\,ds = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx .$$

Men dersom *f* er strengt voksende slik at det eksisterer en invers funksjon $x = f^{-1}(y)$, kan det være hensiktsmessig å beregne arealet slik:

$$A = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi f^{-1}(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

***Eksempel 4.2*:** Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når grafen til $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{2}$, roterer om *y*-aksen.

Løsning: Ved rotasjon om *y*-aksen blir radien i rotasjonen lik *x*. Videre er

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2$$

Da blir arealet

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{13}{3}\pi}}.$$

Integrasjonen er her utført med dataverktøy. Men du kommer greit fram med substitusjonen $u = 1+4x^2$.

Vi avslutter med å la grafen rotere om både *x*- og *y*-aksen:

***Eksempel 4.3*:** Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når grafen til $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, roterer om

a) x-aksen.
b) y-aksen.

Løsning: $y = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\sin^2 x}$.

a) Ved rotasjon om x-aksen er radien lik y. Da blir arealet av rotasjonsflata

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \cos x \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx = \underline{\underline{\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}}.$$

Integrasjonen er utført med dataverktøy.

b) Ved rotasjon om y-aksen er radien lik x. Da blir arealet av rotasjonsflata

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx \approx \underline{\underline{10.07}}.$$

Det eksisterer ikke noen eksakt løsning av dette integralet.

Oppgave 4.1.

Hittil har vi kun sett på rotasjon om en koordinatakse. Du kan sette opp formler for rotasjon om en annen akse parallell med en koordinatakse ved å finne et uttrykk for rotasjonsradien, og ellers bruke et av de uttrykkene for *ds* som vi har brukt ovenfor.