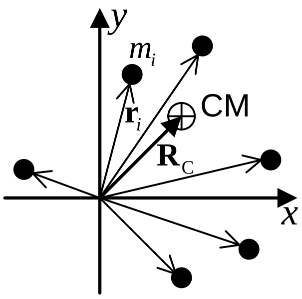
5. Beregning av massesenter.

5.1. Definisjoner.



Figuren til venstre viser et lite utsnitt av en ”sky” av små partikler, der m_i er massen til en partikkel som har posisjonsvektor $\mathbf{r}_i$ i forhold til et fastlagt origo. Selv om figuren er todimensjonal, vil partikkelskyen generelt være tredimensjonal, slik at posisjonsvektoren kan skrives

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

der $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer langs henholdsvis *x*- *y*- og *z*-aksen. Vi definerer nå posisjonsvektoren $\mathbf{R}_C$ til partikkelskyens ***massesenter*** (CM) slik:

Massesenterets posisjon $\mathbf{R}_C$ i forhold til origo er

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\sum m_i\mathbf{r}_i$$

der den samlede massen til alle partiklene er

$$m = \sum m_i \ .$$

Vi summerer over alle partiklene.

I praksis får vi mest å gjøre med sammenhengende, utstrakte legemer. Vi tenker oss at slike legemer er ”limt” sammen av bitte små biter, som hver har masse *dm*. Istedenfor å summere, må vi nå integrere:

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm$$

der legemets samlede masse er

$$m = \int dm$$

og integrasjonene tas over hele legemet. Men ”integrasjon over hele legemet” medfører at vi må integrere *i rommet*. Dette ligger utenfor vårt matematikkpensum. Vi skal derfor begrense oss til å se på spesielle typer legemer, som vi kan handtere innefor vårt pensum.

Vi skal nå begrense oss til romlegemer som har konstant tetthet ρ. Dersom hele legemet har masse *m* og volum *V*, og en liten bit av legemet har masse *dm* og volum *dV*, så er tettheten

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{V}dV \ .$$

Dette gir

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int \mathbf{r}\left(\frac{\cancel{m}}{V}dV\right) = \frac{1}{V}\int \mathbf{r}dV \ .$$

Vi dekomponerer nå både **r** og $\mathbf{R}_C$ ved hjelp av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$, og får

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

og

$$\mathbf{R}_C = X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}} + Z_C\hat{\mathbf{k}} \ .$$

Da blir

$$\mathbf{R}_c = \frac{1}{V}\int \mathbf{r}dV$$

$$X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}} + Z_C\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{V}\int \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right)dV = \left(\frac{1}{V}\int xdV\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{V}\int ydV\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{V}\int zdV\right)\hat{\mathbf{k}}$$

som gir komponentlikningene

$$X_C = \frac{1}{V}\int xdV, \qquad Y_C = \frac{1}{V}\int ydV, \qquad Z_C = \frac{1}{V}\int zdV.$$

Vi summerer opp:

Dersom et legeme har konstant tetthet ρ, er massesenterets posisjonsvektor

$$\mathbf{R}_C = X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}} + Z_C\hat{\mathbf{k}}$$

gitt ved

$$X_C = \frac{1}{V}\int xdV, \qquad Y_C = \frac{1}{V}\int ydV, \qquad Z_C = \frac{1}{V}\int zdV,$$

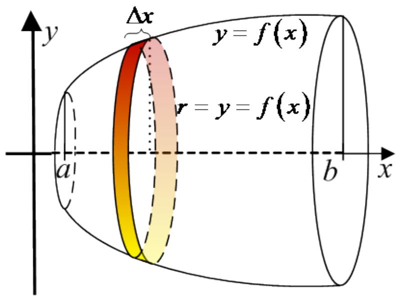
der V er legemets volum, og alle integrasjonene tas over hele legemet.

5.2. Rotasjons-symmetriske legemer.

Vi kan få et rotasjons-symmetrisk legeme ved å la grafen til funksjonen

$$y = f(x), \; a \le x \le b,$$

rotere om x-aksen. Det er umiddelbart klart at dersom tettheten til legemet er konstant må massesenteret ligge på x-aksen slik at $Y_C = Z_C = 0$. Vi trenger bare å finne X_C, og bruker skivemetoden.



Alle de små volumelementene som utgjør ei tynn skive med tykkelse dx vinkelrett på x-aksen har samme x-koordinat. Skiva har da volum

$$dV = \pi y^2 dx.$$

Siden legemets volum er

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV = \int_a^b \pi y^2 dx$$

blir

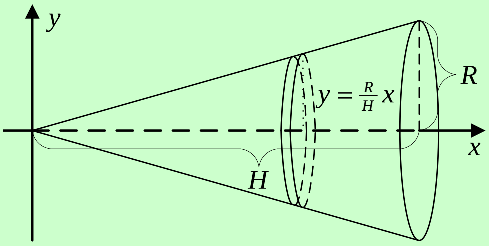
$$X_C = \frac{1}{V}\int_{x=a}^{x=b} x\cdot dV = \frac{1}{V}\int_{x=a}^{x=b} x\cdot \pi y^2 dx = \frac{\pi\int_{x=a}^{x=b} x\cdot y^2 dx}{\pi\int_{x=a}^{x=b} y^2 dx} = \underline{\underline{\frac{\int_{x=a}^{x=b} x\cdot y^2 dx}{\int_{x=a}^{x=b} y^2 dx}}}.$$

Vi kan også få et rotasjons-symmetrisk legeme ved å rotere grafen til $x = f^{-1}(y)$ om y-aksen. Da må massesenteret ligge på y-aksen slik at $X_C = Z_C = 0$. På samme måte som ovenfor blir

$$Y_C = \frac{1}{V}\int_{y=c}^{y=d} y\cdot dV = \frac{1}{V}\int_{y=c}^{y=d} y\cdot \pi x^2 dy = \frac{\pi\int_{y=c}^{y=d} y\cdot x^2 dy}{\pi\int_{y=c}^{y=d} x^2 dy} = \underline{\underline{\frac{\int_{y=c}^{y=d} y\cdot x^2 dy}{\int_{y=c}^{y=d} x^2 dy}}}.$$

***Eksempel 5.1*:** Finn massesenteret til en rett kjegle med høyde H og grunnflateradius R.

Løsning:



Vi plasserer kjeglen med topp-punkt i origo og x-aksen som symmetriakse. Vi kan da tenke oss at kjeglen framkommer ved at den rette linja

$$y = \tfrac{R}{H}x$$

roterer om x-aksen. Da vil massesenteret ligge på x-aksen, og posisjonen er gitt ved

$$X_C = \frac{\int_0^H xy^2dx}{\int_0^H y^2dx} = \frac{\int_0^H x\left(\frac{R}{H}x\right)^2dx}{\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2dx} = \frac{\left(\frac{R}{H}\right)^2\int_0^H x^3dx}{\left(\frac{R}{H}\right)^2\int_0^H x^2dx} = \frac{\frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^H}{\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^H} = \frac{3}{4}\frac{H^4}{H^3} = \underline{\underline{\frac{3}{4}H}}.$$

Eksempel 5.2: Finn massesenteret til det rotasjonslegemet som framkommer når grafen til

$$y = f(x) = x^2$$

og den rette linja $y = 4$ roterer om y-aksen.

Løsning: Massesenteret må ligge på y-aksen. Siden $y = x^2$, blir innsettingen i formelen for Y_C lett:

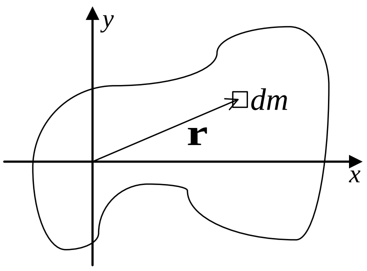
$$Y_C = \frac{\int_{y=0}^{y=4} yx^2dy}{\int_{y=0}^{y=4} x^2dy} = \frac{\int_0^4 y\cdot y\,dy}{\int_0^4 y\,dy} = \frac{\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^4}{\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^4} = \frac{\frac{1}{3}\left(4^3-0^3\right)}{\frac{1}{2}\left(4^2-0^2\right)} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

Oppgave 5.1.

5.3. Plane legemer.

5.3.1. De grunnleggende formlene.

Vi skal nå se på *plane legemer*. Det er mest praktisk å legge plane legemer i xy-planet, slik at det ikke blir noen z-komponent. Massesenteret er da gitt ved



$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm = \frac{1}{m}\int \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\right)dm$$

$$= \left(\frac{1}{m}\int x\,dm\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{m}\int y\,dm\right)\hat{\mathbf{j}} = X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}}$$

Her er

$$X_C = \frac{1}{m}\int x\,dm\,, \qquad Y_C = \frac{1}{m}\int y\,dm$$

Integralene i uttrykkene for X_C og Y_C har fått egne navn:

$\int x\cdot dm$ kalles **statisk moment om *y*-aksen**.

$\int y\cdot dm$ kalles **statisk moment om *x*-aksen**.

Vi får enklere uttrykk dersom vi antar at tettheten er konstant over hele flata. Tettheten må nå uttrykkes i kg/m^2. Dersom flata har masse *m* og areal *A*, mens et lite flate-element har masse *dm* og areal *dA*, blir tettheten

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{dm}{dA} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{A}dA\,.$$

Dermed blir

$$X_C = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int x\left(\frac{\cancel{m}}{A}dA\right) = \frac{1}{A}\int xdA\,,$$

$$Y_C = \frac{1}{m}\int y\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int y\left(\frac{\cancel{m}}{A}dA\right) = \frac{1}{A}\int ydA\,,$$

der arealet av flata er

$$A = \int dA\,.$$

Dette er de grunnleggende formlene som vi skal benytte i praksis.

Også her har integralene fått egne navn:

$M_y = \int x\,dA$ kalles **flatemomentet om *y*-aksen**,

$M_x = \int y\,dA$ kalles **flatemomentet om *x*-aksen**.

Med disse definisjonene kan koordinatene til massesenteret skrives:

$$X_C = \frac{M_y}{A}\,, \qquad Y_C = \frac{M_x}{A}\,.$$

Vi summerer opp:

Massesenteret for ei flate som ligger i *xy*-planet er

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\int \mathbf{r}\,dm = X_C\hat{\mathbf{i}} + Y_C\hat{\mathbf{j}}$$

der

$$X_C = \frac{1}{m}\int x\,dm\,, \qquad Y_C = \frac{1}{m}\int y\,dm\,.$$

Dersom tettheten er konstant over hele flata, blir

$X_C = \frac{1}{A}\int xdA = \frac{M_y}{A}$ der $M_y = \int x\,dA$ er flatemomentet om *y*-aksen,

$Y_C = \frac{1}{A}\int ydA = \frac{M_x}{A}$ der $M_x = \int y\,dA$ er flatemomentet om *x*-aksen.

$$A = \int dA$$

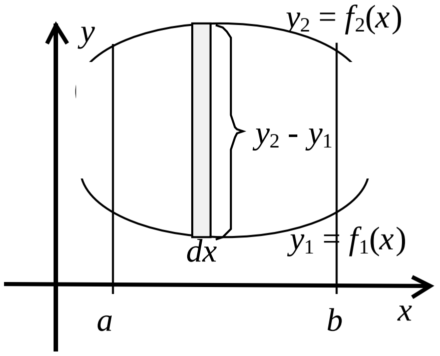
Alle integralene tas over hele flata.

Når vi skal integrere over ei flate, får vi vanligvis *dobbeltintegral* som ligger utenfor vårt pensum. Vi skal derfor begrense oss til to situasjoner som vi kan handtere:

1. Flata deles opp i striper parallelt med *y*-aksen.
2. Flata deles opp i striper parallelt med *x*-aksen.

Vi skal se på de to situasjonene etter tur.

5.3.2. Striper parallelt med *y*-aksen.



Vi antar at flata er avgrenset av grafene til funksjonene

$$y_1 = f_1(x) \text{ og } y_2 = f_2(x),$$

samt av de to rette linjene

$$x = a \text{ og } x = b.$$

Se figuren til venstre.
Vi legger striper med bredde *dx* parallelt med *y*-aksen.
Hvis $y_2 > y_1$ når $a \le x \le b$, får hver stripe et areal

$$dA = (y_2 - y_1)dx$$

slik at

$$A = \int_{x=a}^{x=b} (y_2 - y_1)dx.$$

Alle flate-elementene innenfor ei stripe har nå samme *x*-verdi. Da blir massesenterets *x*-verdi

$$X_C = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} x\,dA = \underline{\underline{\frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} x(y_2 - y_1)dx}}.$$

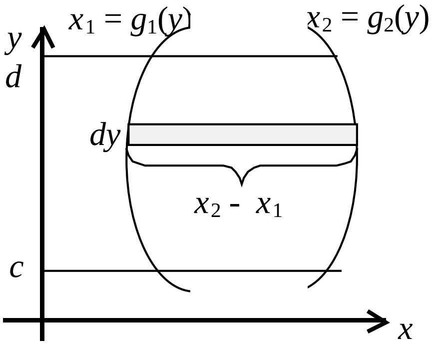
Det er ikke fullt så enkelt å finne Y_C, fordi elementene innenfor ei stripe har *ulike y*-verdier. Vi kan derfor ikke bruke formelen for Y_C direkte. Dette problemet løser vi ved å erstatte *y* i formelen for Y_C med avstanden til *midtpunktet* på stripa, som har *y*-koordinat

$$y_M = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Da blir

$$Y_C = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} y_M \cdot dA = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{x=b} \frac{y_2 + y_1}{2}(y_2 - y_1)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2A}\int_{x=a}^{x=b} \left(y_2^{\,2} - y_1^{\,2}\right)dx}}.$$

5.3.3. Striper parallelt med *x*-aksen.



Vi skal nå anta at flata er avgrenset av grafene til $x_1 = g_1(y)$ og $x_2 = g_2(y)$ samt de to rette linjene $y = c$ og $y = d$. Da legger vi stripene parallelt med *x*-aksen. Se figuren til venstre.

Vi finner massesenteret med samme resonnement som når stripene ligger loddrett. Dersom $x_2 > x_1$ når $c \le y \le d$, blir

$$A = \int_{y=c}^{y=d} (x_2 - x_1)dy$$

og

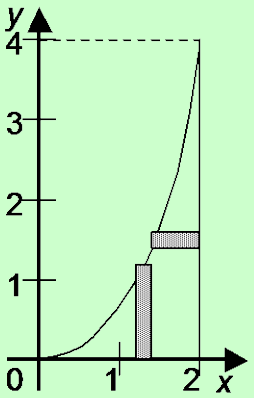
$$Y_C = \frac{1}{A}\int_{y=c}^{y=d} y\cdot\left(x_2 - x_1\right)dy\,, \qquad X_C = \frac{1}{2A}\int_{x=c}^{x=d}\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)dy\,.$$

Eksempel 5.3: Bestem massesenteret til flata som avgrenses av grafen til $y = x^2$, linja $x = 2$ og x-aksen på to måter:

a) ved å legge stripene parallelt med y-aksen.

b) ved å legge stripene parallelt med x-aksen.

Løsning: Situasjonene er illustrert nedenfor til venstre.



a) En loddrett stripe i avstand x fra y-aksen har areal

$$dA = y\cdot dx = x^2 dx$$

Slik at arealet blir

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{1}{3}\left(2^3 - 0^3\right) = \underline{\tfrac{8}{3}}\,.$$

Da blir massesenterets x-koordinat

$$X_C = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{x=2} x\left(y_2 - y_1\right)dx = \frac{1}{\frac{8}{3}}\int_0^2 x\cdot\left(x^2 - 0\right)dx$$

$$= \tfrac{3}{8}\left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \tfrac{3}{32}\left(2^4 - 0^4\right) = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$$

Massesenterets y-koordinat blir

$$Y_C = \frac{1}{2A}\int_{x=0}^{x=2}\left(y^2 - 0^2\right)dx = \frac{1}{2\cdot\frac{8}{3}}\int_0^2\left(x^2\right)^2 dx = \tfrac{3}{16}\cdot\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \tfrac{3}{16}\cdot\tfrac{1}{5}\left(2^5 - 0\right) = \underline{\underline{\tfrac{6}{5}}}\,.$$

b) Når vi skal bruke striper parallelle med x-aksen, må vi først finne x uttrykt ved y:

$$y = x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \sqrt{y}\,.$$

Vi kan selvsagt bruke det arealet som vi fant ovenfor. Men vi kan også beregne arealet også med utgangspunkt i vannrette striper. Av figuren ser vi at arealet av en slik vannrett stripe i avstand y fra x-aksen blir

$$dA = \left(2 - x\right)dy = \left(2 - \sqrt{y}\right)dy$$

slik at arealet blir

$$A = \int_0^4\left(2 - \sqrt{y}\right)dy = \int_0^4\left(2 - y^{\frac{1}{2}}\right)dy = \left[2y - \tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 2\cdot 4 - \tfrac{2}{3}\cdot\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 - 0 = \underline{\tfrac{8}{3}}\,.$$

Da blir

$$X_C = \frac{1}{2A}\int_{y=0}^{y=4}\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)dy = \frac{1}{2\cdot\frac{8}{3}}\int_0^4\left(2^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right)dy = \tfrac{3}{16}\int_0^4\left(4 - y\right)dy$$

$$= \tfrac{3}{16}\cdot\left[4y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^4 = \tfrac{3}{16}\cdot\left(4\cdot 4 - \tfrac{1}{2}\cdot 4^2\right) - 0 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$$

$$Y_C = \frac{1}{A}\int_{y=0}^{y=4} y\cdot\left(x_2 - x_1\right)dy = \frac{1}{\frac{8}{3}}\int_0^4 y\left(2 - \sqrt{y}\right)dy = \tfrac{3}{8}\int_0^4\left(2y - y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$

$$= \tfrac{3}{8}\cdot\left[y^2 - \tfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \tfrac{3}{8}\cdot\left(4^2 - \tfrac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}}\right) - 0 = \tfrac{3}{8}\cdot\left(16 - \tfrac{2}{5}\cdot 2^5\right) = \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{16}{5} = \underline{\underline{\tfrac{6}{5}}}$$

Oppgave 5.2.

5.4. Massesenter for krumme linjer.

En krum linje er gitt ved $y = f(x)$ eller ved $x = f^{-1}(y)$. Anta at tettheten ρ (som er gitt i kg/m) er konstant slik at

$$\rho = \frac{m}{L} = \frac{dm}{ds}$$

der m er massen til linja, L er lengden til linja, mens dm og ds er henholdsvis masse og lengde til et lite element på linja. Koordinatene til massesenteret er da gitt ved

$$X_C = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int x\left(\frac{\cancel{m}}{L}ds\right) = \frac{1}{L}\int x\,ds$$

og

$$Y_C = \frac{1}{m}\int y\,dm = \frac{1}{\cancel{m}}\int y\left(\frac{\cancel{m}}{L}ds\right) = \frac{1}{L}\int y\,ds$$

der vi integrerer langs hele linja.

I notatet om buelengde har vi vist hvordan vi kan finne lengden L av et krumt linjestykke. Der fant vi bl.a. at:

Dersom $y = f(x)$, er $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

Dersom $x = f^{-1}(y)$, er $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$.

Vi får bruk for disse uttrykkene nå også.

***Eksempel 5.4*:** Beregn koordinatene til massesenteret til grafen til $y = x^2$, $0 \le x \le 2$.

Løsning:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{dy}{dx} = 2x$$

slik at

$$ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2}\,dx .$$

Da blir

$$L = \int_{x=0}^{x=2} ds = \int_0^4 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \underline{\tfrac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)+\sqrt{17}} \approx \underline{4.6468}.$$

$$X_C = \tfrac{1}{L}\int_{x=0}^{x=2} x\,ds = \tfrac{1}{L}\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \tfrac{1}{L}\cdot\tfrac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right) \approx \underline{\underline{1.239}}.$$

$$Y_C = \tfrac{1}{L}\int_{x=0}^{x=2} y\,ds = \tfrac{1}{L}\int_0^2 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{L}\cdot\left(\tfrac{33}{16}\sqrt{17} - \tfrac{1}{64}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)\right) \approx \underline{\underline{1.823}}$$

På grafen er massesenteret tegnet inn med en liten ring.

Merk at massesenteret ikke ligger på selve linja. Du kan visualisere massesenteret slik: Tenk deg at linja spenner ut en masseløs membran. Denne membranen kan nå balansere på en spiss som plasseres i massesenteret.

Oppgave 5.3.

5.5. Oppdeling i del-legemer.

Definisjonen på massesenter

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

gjelder egentlig når m_i er massen til en *partikkel* i legemet vårt. Men formelen gjelder også dersom legemet vårt består av del-legemer med kjent masse m_i, og der $\mathbf{r}_i$ oppfattes som posisjonsvektoren til del-legemets massesenter. Jeg skal nøye meg med å vise at dette stemmer for et legeme som deles opp i to del-legemer med masse m_1 og m_2, og volum V_1 og V_2. For hvert av disse del-legemene er massesentrene gitt ved

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{m_1}\sum_{V_1} m_i \mathbf{r}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{V_1} m_i \mathbf{r}_i = m_1 \mathbf{r}_1 \quad \text{der vi summerer over } V_1$$

og

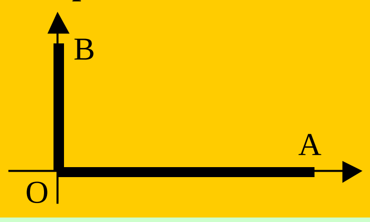
$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{m_2}\sum_{V_2} m_i \mathbf{r}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{V_2} m_i \mathbf{r}_i = m_2 \mathbf{r}_2 \quad \text{der vi summerer over } V_2.$$

Da blir

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{m} = \frac{1}{m}\left(\sum_{V_1} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{V_2} m_i \mathbf{r}_i\right) = \frac{1}{m}\left(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2\right).$$

Vi kan enkelt benytte samme resonnement dersom legemet deles opp i n deler. Dette kan vi benytte oss av til å beregne massesenteret til legemer som kan deles opp i enkle del-legemer. Jeg skal illustrere teknikken i et par eksempler.

Eksempel 5.5:



To svært tynne metallstenger med lengde $\text{OA} = l$ og $\text{OB} = \frac{1}{2} l$ sveises sammen til en vinkel slik figuren til venstre viser. Finn vinkelens massesenter.

Løsning: La hele legemets masse være m. Siden stanga OA er dobbelt så lang som OB, må den også ha dobbelt så stor masse. Dette gir at massene til OA og OB blir henholdsvis

$$m_{\text{OA}} = \tfrac{2}{3} m, \text{ og } m_{\text{OB}} = \tfrac{1}{3} m.$$

Begge stengene har sitt massesenter midt på, slik at

$$\mathbf{r}_{\text{OA}} = \tfrac{1}{2} l\,\hat{\mathbf{i}}, \text{ og } \mathbf{r}_{\text{OB}} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} l\,\hat{\mathbf{j}} = \tfrac{1}{4} l\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Legemets massesenter er da gitt ved

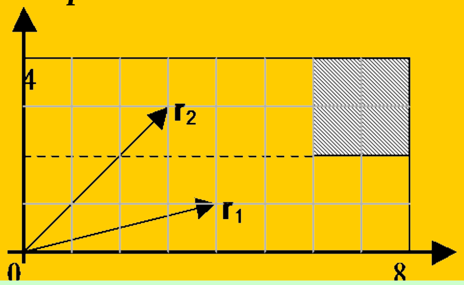
$$\mathbf{R} = \frac{1}{m}\left(m_{\text{OA}}\mathbf{r}_{\text{OA}} + m_{\text{OB}}\mathbf{r}_{\text{OB}}\right) = \frac{1}{m}\left(\tfrac{2}{3} m \cdot \tfrac{1}{2} l\,\hat{\mathbf{i}} + \tfrac{1}{3} m \cdot \tfrac{1}{4} l\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} l\,\hat{\mathbf{i}} + \tfrac{1}{12} l\,\hat{\mathbf{j}}}}.$$

Vi kan føre et tilsvarende resonnement dersom vi fjerner en bit fra et legeme. Anta at m er massen og $\mathbf{R}_C$ er massesenteret til et legeme som framkommer når vi fjerner et stykke med masse m_2 og massesenter $\mathbf{r}_2$ fra et legeme med masse m_1 og massesenter $\mathbf{r}_1$. Da får vi at

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{m}\left(m_1 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_2\right).$$

I neste eksempel skal vi illustrere bruken av denne formelen.

***Eksempel 5.6*:**



Ei skive består av et rektangel med sidekanter 8 og 4, der et kvadratisk hjørne med sidekant 2 er fjernet. Se figuren til venstre.
Finn massesenteret til skiva.

Løsning: Jeg skal løse oppgaven på to måter.
Først deler jeg skiva inn i to deler slik den stiplede linja på figuren viser. Hele skiva har areal

$$A = 8 \cdot 4 - 2^2 = 28 .$$

Dersom hele skiva har masse m, blir tettheten (som oppgis i kg/m^2)

$$\rho = \frac{m}{A} = \frac{m}{28} .$$

Nedre del får massen

$$m_1 = \rho \cdot (8 \cdot 2) = \frac{m}{28} \cdot 16 = \underline{\frac{4}{7} m}$$

og øvre del får massen

$$m_2 = \rho \cdot (6 \cdot 2) = \frac{m}{28} \cdot 12 = \underline{\frac{3}{7} m} .$$

Hver av delene har massesenter midt i. Av figuren ser vi at

$$\mathbf{r}_1 = \underline{4\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}}$$

og

$$\mathbf{r}_2 = \underline{3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}} .$$

Da blir massesenteret gitt ved

$$\mathbf{R}_\mathrm{C} = \frac{1}{m}\left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{4}{7}m\left(4\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}\right) + \frac{3}{7}m\left(3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(16\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{i}} + 9\hat{\mathbf{j}}\right) = \underline{\underline{\frac{25}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{7}\hat{\mathbf{j}}}}$$

Så skal jeg løse problemet ved å ta utgangspunkt i rektangelet, og *fjerne* bidraget fra det lille kvadratet. Hvis vi kaller rektangelets masse og massesenter for m_R og $\mathbf{r}_\mathrm{R}$, og kvadratets masse og massesenter for m_K og $\mathbf{r}_\mathrm{K}$, kan vi sette opp (se figuren, og kontroller massesentrene til rektangelet og til kvadratet):

$$\mathbf{R}_\mathrm{C} = \frac{1}{m}\left(m_\mathrm{R}\mathbf{r}_\mathrm{R} - m_\mathrm{K}\mathbf{r}_\mathrm{K}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{28}\cdot(8\cdot 4)\cdot\left(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) - \frac{m}{28}\cdot(2\cdot 2)\cdot\left(7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right)\right)$$

$$= \frac{8}{7}\left(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) - \frac{1}{7}\left(7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right) = \underline{\underline{\frac{25}{7}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{7}\hat{\mathbf{j}}}}$$

Og dette er samme resultat som før.

Oppgave 5.4.