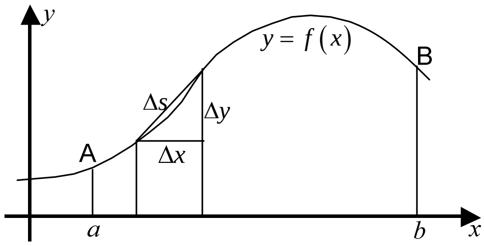
3. Beregning av buelengde.

Vi stiller oss nå dette problemet: Hvor lang er grafen til en funksjon $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$? Situasjonen er vist nedenfor.



Vi ønsker å finne lengden av grafen fra A til B. Vi tenker oss at vi avsette mange punkter tett i tett på grafen. Mellom punktene trekker vi korte, rette linjer. Lengden av hver slik kort, rett linje kaller vi Δs. Av figuren ser vi at

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left(1 + \left(\tfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) \cdot (\Delta x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s = \sqrt{1 + \left(\tfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \,.$$

Så lar vi $\Delta x \to 0$. Da erstatter vi Δs med *ds* og Δx med *dx*, samtidig som $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.

Dette fører til at

$$ds = \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \,.$$

Når vi summerer alle linjestykkene Δs, får vi tilnærmet lengden av grafen mellom A og B. Jo tettere vi avsetter punktene, jo bedre blir tilnærmingen. Derfor kan vi sette at buelengden fra A til B blir

$$s_{AB} = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_A^B \Delta s = \int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \,.$$

Dersom *f* er monotont voksende eller monotont avtakende mellom A og B, kan vi finne *x* som funksjon av *y*. Da kan vi sette

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left(\left(\tfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 1\right) \cdot (\Delta y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s = \sqrt{\left(\tfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 1} \cdot \Delta y \,.$$

Så lar vi $\Delta y \to 0$. Da erstatter vi Δs med *ds* og Δy med *dy*, samtidig som $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$.

Dette fører til at

$$ds = \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy \,,$$

og buelengden mellom A og B blir

$$s_{AB} = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_A^B \Delta s = \int_{y=c}^{y=d} ds = \int_c^d \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy \,.$$

Her er *c* og *d* *y*-verdiene til henholdsvis A og B.

Vi får bruk for disse uttrykkene i andre sammenhenger også, og summerer derfor opp:

Dersom $y = f(x)$, er $ds = \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ og $s = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

Dersom $x = f^{-1}(y)$, er $ds = \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$ og $s = \int_{y=c}^{y=d} \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$.

I praksis viser det seg at formelen for buelengde ofte gir integraler som er vanskelige eller umulige å løse eksakt. Vi må da ty til numeriske metoder for å finne en tilnærmet verdi av integralet.

***Eksempel 3.1*:** Finn lengden av grafen til $y = x^2$ fra $x = 0$ til $x = 2$.

Løsning: $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x$.
Da blir

$$ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+(2x)^2} = \sqrt{1+4x^2}$$

slik at lengden av grafen blir

$$s = \int_{x=0}^{x=2} ds = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \underline{\underline{\sqrt{17}+\tfrac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)}}.$$

Her er integrasjonen utført med dataverktøy. Det kreves flere trinn med fantasifulle substitusjoner for å løse integralet for hand.

***Eksempel 3.2*:** Finn lengden av grafen til $y = e^x$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

Løsning: $y = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x$.
Da blir

$$ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(e^x\right)^2} = \sqrt{1+e^{2x}}\,.$$

Lengden av grafen blir

$$s = \int_{x=0}^{x=1} ds = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx\,.$$

Dette integralet lar seg ikke løse eksakt. Vi finner en tilnærmet verdi med dataverktøy:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \approx \underline{\underline{2.0035}}\,.$$

***Eksempel 3.3*:** Løs problemet fra Eksempel 3.2 ved å bruke den inverse funksjonen til $y = e^x$.

Løsning: Ser at funksjonen er voksende.

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Da er

$$ds = \sqrt{1+\left(\tfrac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\tfrac{1}{y^2}}\,.$$

Grensene for integrasjonen blir

$$y = e^0 = 1 \quad \text{og} \quad y = e^1 = e\,.$$

Lengden av grafen blir da

$$s = \int_{y=1}^{y=e} ds = \int_1^e \sqrt{1+\tfrac{1}{y^2}}\,dy \approx \underline{\underline{2.0035}}\,.$$

Heller ikke her er det mulig å finne en eksakt verdi for integralet, slik at en tilnærmet verdi er funnet med dataverktøy.

Oppgave 3.1.