1. Arealberegning.

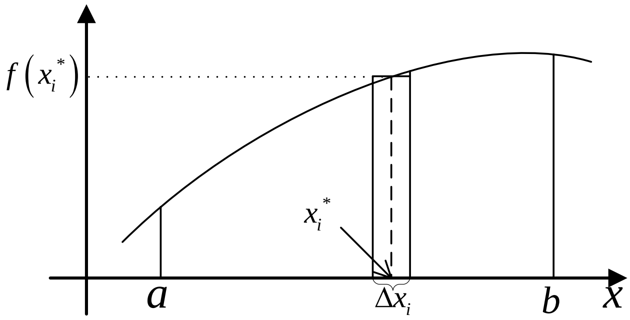
Da vi utledet de grunnleggende reglene for integrasjon, tok vi utgangspunkt i arealberegning. Vi sa at dersom en funksjon $y = f(x)$ var positiv i intervallet $a \le x \le b$, fant vi arealet A som avgrenses av grafen til *f*, linjene $x = a$ og $x = b$, og *x*-aksen ved å summere bidragene fra mange små striper som hver har areal $\Delta A_i = f(x_i^*) \cdot \Delta x_i$ der x_i^* er en vilkårlig *x*-verdi i intervallet Δx_i. Det samlede arealet av alle stripene blir da

$$\sum_{x=a}^{x=b} \Delta A_i = \sum_{x=a}^{x=b} f(x_i^*) \Delta x_i \,.$$

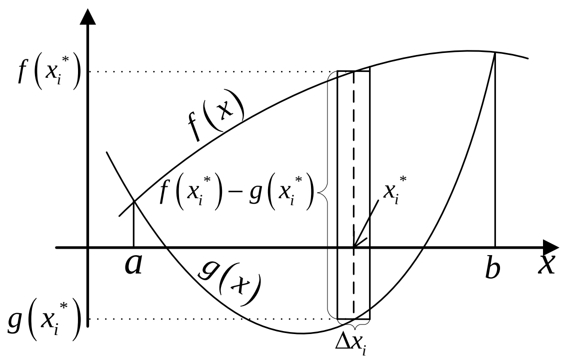
Så lot vi bredden av stripene gå mot null, samtidig som antall striper går mot uendelig. Da blir arealet A gitt ved

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Se figuren nedenfor.



Vi skal nå videreføre disse ideene, og skal starte med å finne arealet som avgrenses av grafene til to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$.



Figuren over viser grafene til de to funksjonene *f* og *g*. Merk at grafene skjærer hverandre i $x = a$ og i $x = b$, og at $f(x) \ge g(x)$ i hele intervallet $a \le x \le b$. Arealet mellom grafene tenkes nå delt opp i loddrette striper med bredde Δx_i og høyde $h(x_i^*) = f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Da er arealet av hver stripe gitt ved

$$\Delta A_i = h(x_i^*) \cdot \Delta x_i = \left(f(x_i^*) - g(x_i^*) \right) \cdot \Delta x_i$$

slik at det samlede arealet mellom grafene er

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx \,.$$

Merk at resonnementet og formelen ovenfor gjelder selv om hele eller deler av arealet ligger under *x*-aksen.

Når du skal løse oppgaver av denne typen, må du alltid starte med å tegne en figur. Tegn inn grafene til de to funksjonene, og bestem skjæringspunktene. Den funksjon som har størst funksjonsverdi (øverste graf) svarer til *f* i arealformelen ovenfor, og den funksjonen som har minst funksjonsverdi svarer til *g*. Resten er integrasjonsteknikk.

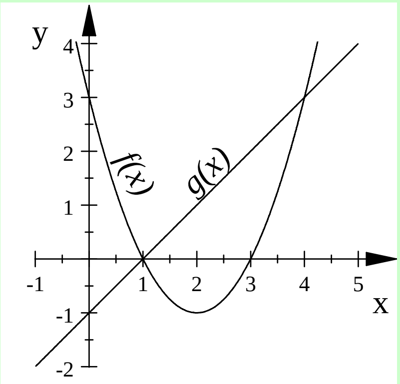
***Eksempel 1.1*: ** Beregn arealet som avgrenses av grafene til

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

og

$$g(x) = x - 1.$$

Løsning: Vi starter med å tegne opp grafene til de to funksjonene:



Så finner vi skjæringspunktene mellom grafene:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Skjæringspunktene er altså $x = 1$ og $x = 4$.

Av figuren ser vi at *g* ligger over *f* i hele intervallet. Da blir arealet

$$A = \int_1^4 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_1^4 \left((x-1) - (x^2 - 4x + 3)\right) dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right) dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 = \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + \tfrac{5}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4\right) - \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + \tfrac{5}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1\right) = \underline{\underline{\tfrac{9}{2}}}$$

Viktigheten av å tegne graf først, kan ikke understrekes kraftig nok. Du må heller ikke stole blindt på formler for arealberegning, men må bruke sunn fornuft kombinert med figuren. Dette illustreres av neste eksempel:

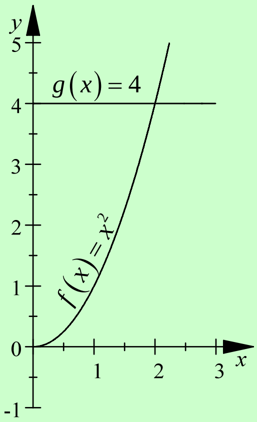
***Eksempel 1. 2*: ** Beregn arealet i første kvadrant som avgrenses av grafen til $f(x) = x^2$, y-aksen, og den rette linja $y = 4$.

Løsning: Figuren nedenfor til venstre viser at arealet vi er på jakt etter, er avgrenset av grafen til en funksjon $g(x) = 4$, *y*-aksen, og grafen til $f(x) = x^2$.

Vi må starte med å finne skjæringspunktet mellom $f(x)$ og $g(x)$:

$$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2.$$

Vi skal bruke verdien $x = 2$. Arealet blir



$$A=\int_0^2 \left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\left(4\cdot 2-\tfrac{1}{3}\cdot 2^3\right)-\left(4\cdot 0-\tfrac{1}{3}\cdot 0^3\right)=\underline{\underline{\tfrac{16}{3}}}$$

Dersom vi ikke tegner graf først, er det fort gjort å tro at vi skal løse integralet

$$\int_0^2 x^2 dx\,.$$

Men hvis vi gjør det, får vi arealet *under* grafen til *f*, ikke arealet *mellom* denne grafen og linja $y=g(x)=4$.

Oppgave 1.1.

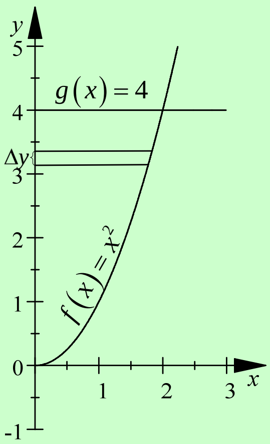
Standardmetoden går altså ut på å legge loddrette striper med bredde Δx. Men noen ganger kan det lønne seg å legge vannrette striper med bredde Δy. Dersom lengden av hver stripe er *x*, og vi kjenner *x* som funksjon av *y*, får vi arealet ved å løse integralet

$$A=\int_{y_a}^{y_b} x\,dy$$

der y_a og y_b er henholdsvis nedre og øvre grense for integralet.

Vi skal som eksempel løse problemet i eksempel 1.2 med denne teknikken.

***Eksempel 1.3*:** Beregn arealet i første kvadrant som avgrenses av grafen til $f(x)=x^2$, *y*-aksen, og den rette linja $y=4$ ved å legge inn vannrette striper med bredde Δy.



Løsning: Vi skal nå finne arealet ved hjelp av

$$A=\int_{y_a}^{y_b} x\,dy\,,$$

se figuren til venstre. Vi må da først finne *x* som funksjon av *y*. Vi får

$$y=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=+\sqrt{y}$$

der vi benytter at *x* er positiv. Da blir arealet

$$A=\int_0^4\sqrt{y}dy=\int_0^4 y^{\frac{1}{2}}dy=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}y^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4=\left[\tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\tfrac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)=\tfrac{2}{3}\left(\sqrt{4}^3-0\right)=\tfrac{2}{3}\left(2^3-0\right)=\underline{\underline{\tfrac{16}{3}}}$$

Til slutt tar vi med et eksempel til, som viser hvor viktig det er å tegne graf først. Eksemplet viser også at du må bruke hodet når du løser slike oppgaver, ikke bare stole på standard-formler.

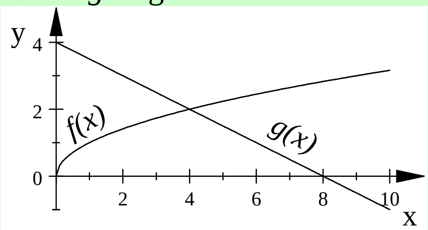
***Eksempel 1.4*:** Bestem arealet som avgrenses av *x*-aksen og grafene til

$$f(x)=\sqrt{x}$$

og

$$g(x)=-\tfrac{1}{2}x+4\,.$$

Løsning: Figuren blir slik:



Jeg skal løse oppgaven på to måter, først ved å legge inn de vanlige loddrette stripene med bredde Δx, og deretter ved å legge inn vannrette striper med bredde Δy.

Uansett metode må vi først beregne skjæringspunktet mellom de to grafene:

$$-\tfrac{1}{2}x+4=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \left(-\tfrac{1}{2}x+4\right)^2=x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x\cdot 4+16=x$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}x^2-5x+16=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{5\pm 3}{\frac{1}{2}}=\begin{cases}16\\4\end{cases}$$

Vi ser av figuren at $x=4$ er den eneste brukbare løsningen. Da er $y=\sqrt{4}=2$, som også stemmer med grafen.

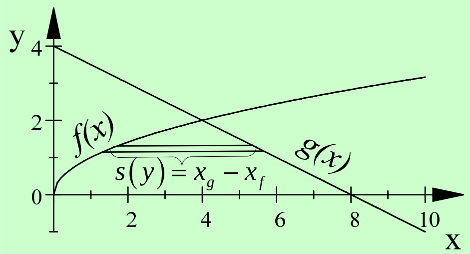
Vi må også finne skjæringspunktene med *x*-aksen.
Vi ser lett at grafen til $f(x)=\sqrt{x}$ skjærer *x*-aksen når $x=\underline{0}$.
Grafen til $g(x)=-\tfrac{1}{2}x+4$ skjærer *x*-aksen når

$$-\tfrac{1}{2}x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{8}.$$

Når vi legger inn loddrette striper, må arealet deles inn i to deler. Vi integrerer først $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ fra $x=0$ til $x=4$. Deretter integrerer vi $g(x)=-\tfrac{1}{2}x+4$ fra $x=4$ til $x=8$.

$$A=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int_4^8\left(-\tfrac{1}{2}x+4\right)dx=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4+\left[-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^2+4x\right]_4^8=\left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4+\left[-\tfrac{1}{4}x^2+4x\right]_4^8$$

$$=\tfrac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)+\left(-\tfrac{1}{4}\cdot 8^2+4\cdot 8\right)-\left(-\tfrac{1}{4}\cdot 4^2+4\cdot 4\right)=\tfrac{2}{3}\cdot 8-16+32+4-16=\underline{\underline{\tfrac{28}{3}}}$$



Når vi legger inn vannrette striper, må vi først finne *x* uttrykt ved *y* for begge funksjonene:

$$f(x)=y=\sqrt{x_f} \quad \Leftrightarrow \quad x_f=y^2$$

og

$$g(x)=y=-\tfrac{1}{2}x_g+4 \quad \Leftrightarrow \quad x_g=-2y+8.$$

Lengden av ei stripe i avstand *y* fra *x*-aksen blir

$$s(y)=x_g-x_f=(-2y+8)-y^2=-y^2-2y+8.$$

Arealet blir da

$$A=\int_0^2 s(y)\,dy=\int_0^2\left(-y^2-2y+8\right)dy=\left[-\tfrac{1}{3}y^3-y^2+8y\right]_0^2=\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 2^3-2^2+8\cdot 2\right)-0=\underline{\underline{\tfrac{28}{3}}}.$$

Oppgave 1.2.