7. Uegentlige integral.

Hittil har vi kun tatt for oss integral der integrasjonsgrensene er endelige, samtidig som integranden også er endelig innenfor hele integrasjonsområdet. Nå skal vi se på integral der integrasjonsgrensene går mot uendelig, og integral der integranden går mot uendelig. Slike integral har på norsk fått det misvisende navnet ***uegentlige integral.***

Det kan virke nærliggende å tro at integral må gå mot uendelig når integrasjonsgrensene går mot uendelig, eller når integranden selv går mot uendelig. Men i noen situasjoner går faktisk slike integral mot en endelig verdi. Vi sier at integralene ***konvergerer*** mot en endelig verdi. Dersom slike integral ikke går mot en endelig verdi, sier vi at de ***divergerer***.

Vi skal ta for oss disse situasjonene etter tur, og skal først se på integral der en eller begge integrasjonsgrensene går mot uendelig.

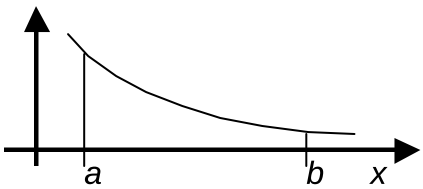
7.1. Integral der en integrasjonsgrense går mot uendelig.

Integral av typen

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

skal oppfattes som

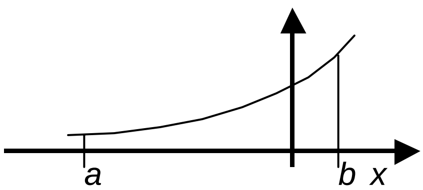
$$\lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx\,.$$



Dette betyr at vi først beregner det bestemte integralet på vanlig måte. Deretter lar vi $b\to\infty$.

På samme måte setter vi

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)\,dx\,.$$



Noen eksempler vil illustrere framgangsmåten.

***Eksempel 7.1*:** Beregn disse integralene:

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$

b) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

Løsning:

a) $$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = 1 - \lim_{a\to-\infty} e^a = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}.$$

Dette integraler konvergerer mot 1.

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1} \right]_1^b$

$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$

Dette integralet konvergerer mot 1.

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x) \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - \ln 1 = \lim_{b\to\infty} \ln(b) - 0$.

Men når $b \to \infty$ vil $\ln(b) \to \infty$. Det vil si at dette integralet divergerer.

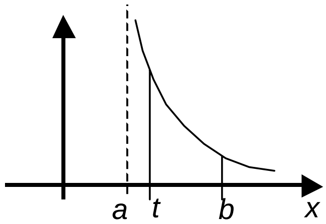
Oppgave 7.1.

7.2. Integral der integranden går mot uendelig.

Vi skal nå se på noen integral der integranden går mot uendelig når vi nærmer oss en av integrasjonsgrensene.

Dersom $f(x) \to \infty$ når $x \to a^+$, setter vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

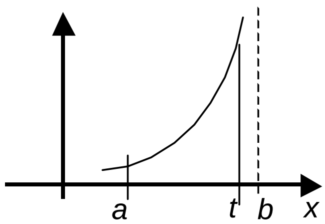


Dette innebærer at vi først beregner et bestemt integral på helt vanlig måte, og deretter lar vi integrasjonsgrensen gå mot den verdien der $f(x) \to \infty$.

På samme måte setter vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

dersom $f(x) \to \infty$ når $x \to b^-$.



Eksempel 7.2: Beregn disse integralene:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

c) $\int_0^1 \ln x\, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$

Løsning:

a) Vi ser at $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ når $x \to 0^+$. Da blir

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1$$

$$= 2\lim_{a\to 0^+}\left(\sqrt{1}-\sqrt{a}\right) = 2\left(1-\lim_{a\to 0^+}\sqrt{a}\right) = 2(1-0) = \underline{\underline{2}}$$

Integralet konvergerer mot 2.

b) Vi ser at $\frac{1}{x^2}\to\infty$ når $x\to 0^+$. Da blir

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-2}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[-x^{-1}\right] = \lim_{a\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{a}\right) = -1+\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Men vi ser at $\frac{1}{a}\to\infty$ når $a\to 0$. Det vil si at integralet divergerer.

c) Vi vet at $\ln x\to-\infty$ når $x\to 0^+$. Da blir

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[x\cdot\ln x - x\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(1\cdot\ln(1)-1-a\cdot\ln(a)+a\right)$$

$$= 1\cdot 0 - 1 + \lim_{a\to 0^+}\left(-a\cdot\ln(a)+a\right) = 0-1-\lim_{a\to 0^+}\left(a\cdot\ln(a)\right)+0$$

$$= -1-\lim_{a\to 0^+}\left(a\cdot\ln(a)\right)$$

Det ubestemte integralet er løst i notatet om delvis integrasjon. Problemet er grenseverdien

$$\lim_{a\to 0}\left(a\cdot\ln(a)\right)$$

som er et "$0\cdot\infty$"-uttrykk. Denne grenseverdien har vi beregnet i notatet om L'Hôpitals regel, og fant da at grenseverdien var lik null. Alt i alt finner vi at

$$\int_0^1 \ln x\,dx = -1-\lim_{a\to 0}\left(a\cdot\ln(a)\right) = -1-0 = \underline{\underline{-1}}.$$

Integralet konvergerer mot –1.

d) Vi vet at $\tan x\to\infty$ når $x\to\frac{\pi}{2}^-$. Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx.$$

Vi beregner først det ubestemte integralet:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-1}{u}\,du = -\ln|u|+C = -\ln(\cos x)+C$$

der vi har benyttet substitusjonen

$$u(x) = \cos x \quad\Rightarrow\quad du = -\sin x\,dx.$$

Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\left[-\ln(\cos x)\right]_0^b$$

$$= -\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\cos b)+\ln(\cos 0) = -\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\cos b)+\ln(1)$$

$$= -\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\cos b)+0$$

Nå vet vi at når $b\to\frac{\pi}{2}$ vil $\cos b\to 0$. Da vil $\ln(\cos b)\to-\infty$, og integralet divergerer.

`Oppgave 7.2`.