3. Substitusjon.

I utgangspunktet er dette kjerneregelen anvendt på integraler. Hovedpoenget er at vi ser etter en kjerne $u(x)$ som er slik at integranden blir en funksjon av *u* etter at *dx* er erstattet med *du*. Denne erstatningen gjøres vanligvis ved å sette

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{u'(x)} du\,.$$

Hvis vi nå får et uttrykk som kan integreres, er vi (nesten) i mål.

***Eksempel 3.1*:** Beregn integralene nedenfor:

a) $\int 2\sin(2x)\,dx$

b) $\int x \cdot e^{-x^2}\,dx$

c) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

d) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

e) $\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx$

f) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

Løsning:

a) Vi ser at når vi deriverer $2x$ får vi 2. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2} du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int 2\sin(2x)\,dx = \int \cancel{2}\sin u \cdot \tfrac{1}{\cancel{2}}\,du = -\cos u + C = \underline{\underline{-\cos(2x) + C}}\,.$$

b) Vi ser at når vi deriverer $-x^2$ får vi $-2x$, og *x*-en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = -2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{-2x} du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int x \cdot e^{-x^2}\,dx = \int \cancel{x} \cdot e^u \left(-\tfrac{1}{2\cancel{x}}\,du\right) = -\tfrac{1}{2}\int e^u\,du = -\tfrac{1}{2} \cdot e^u + C = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + C}}\,.$$

c) Vi ser at når vi deriverer x^2-1 får vi $2x$, og *x*-en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x} du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C}}\,.$$

d) Vi ser at når vi deriverer x^2+1 får vi $2x$, og x-en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x)=x^2+1 \quad\Rightarrow\quad u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad\Leftrightarrow\quad dx=\frac{1}{2x}du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int \cancel{x}\cdot\sqrt{u}\cdot\tfrac{1}{2\cancel{x}}du=\tfrac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du=\tfrac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C}}$$

e) Her merker vi oss at når vi deriverer $\sin x$ får vi $\cos x$ som inngår i integranden. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x)=\sin x \quad\Rightarrow\quad u'(x)=\frac{du}{dx}=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad dx=\frac{1}{\cos x}du\,.$$

Integralet blir nå

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx=\int u^2\cdot\cancel{\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos x}}du=\tfrac{1}{3}u^3+C=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}\sin^3 x+C}}\,.$$

f) Dette minner litt om integrasjonsformelen som gir $\arctan x$:

$$\int\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan(x)+C\,.$$

Men for å kunne bruke denne formelen, må vi skaffe oss et 1-tall som konstantledd i nevneren. Det gjør vi slik:

$$\int\frac{1}{x^2+4}dx=\int\frac{1}{4\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)}dx=\tfrac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx\,.$$

Nå prøver vi

$$u(x)=\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad dx=2du\,.$$

Integralet blir nå

$$\int\frac{1}{x^2+4}dx=\tfrac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\tfrac{1}{\cancel{4}}\int\frac{1}{1+u^2}\cdot\cancel{2}du=\tfrac{1}{2}\arctan u+C=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{x}{2}\right)+C}}.$$

Du kommer ofte bort i integraler av samme type som i Eksempel 3.1a) ovenfor. Det kan derfor være nyttig å løse dem en gang for alle. Da får vi reglene nedenfor, som du sikkert klarer å bevise selv ved å benytte samme framgangsmåte som i Eksempel 3.1a):

Når a er en konstant, blir

$$\int\sin(a\cdot x)\,dx=-\tfrac{1}{a}\cos(a\cdot x)+C$$

$$\int\cos(a\cdot x)\,dx=\tfrac{1}{a}\sin(a\cdot x)+C$$

$$\int e^{a\cdot x}dx=\tfrac{1}{a}e^{a\cdot x}+C$$

Oppgave 3.1.

Da vi løste integralene i Eksempel 3.1, erstattet vi kjernen *u* med den opprinnelige variabelen *x* i sluttsvaret. Men når vi skal beregne *bestemte* integral, er dette ikke nødvendig. Det er ofte enklere å endre *grensene* for integrasjonen samtidig som vi innfører den nye integrasjonsvariabelen *u*. Eksemplene nedenfor viser hvordan vi går fram.

Eksempel 3.2: Beregn disse bestemte integralene:

a) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (se Eksempel 3.1d).

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,dx$ (se Eksempel 3.1e).

Løsning:

a) Vi løste integralet ved å innføre kjernen

$$u(x)=x^2+1,$$

og fant at

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du=\tfrac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C.$$

Istedenfor å gjeninnføre *x* i dette svaret før vi setter inn grensene, kan vi benytte at når $x=0$ er $u=0^2+1=1$, og når $x=2$ er $u=2^2+1=5$. Da blir

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\tfrac{1}{2}\int_1^5\sqrt{u}\,du=\tfrac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\tfrac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)}}.$$

Dette et lettere enn å benytte at

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\left[\tfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\tfrac{1}{3}\left(\left(2^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-\left(0^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)=\tfrac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)}}.$$

b) Vi løste integralet ved å innføre kjernen

$$u(x)=\sin x,$$

og fant at

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx=\int u^2du=\tfrac{1}{3}u^3+C.$$

Istedenfor å gjeninnføre *x* i dette svaret før vi setter inn grensene, kan vi benytte at når $x=0$ er $u=\sin 0=0$, og når $x=\frac{\pi}{2}$ er $u=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos x\,dx=\int_0^1 u^2du=\left[\tfrac{1}{3}u^3\right]_0^1=\tfrac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}.$$

Dette et lettere enn å benytte at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos x\,dx=\left[\tfrac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\tfrac{1}{3}\left(\sin^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-\sin^3(0)\right)=\tfrac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}.$$

Oppgave 3.2.

I integrasjonsformelen for $\int \frac{1}{x}dx$ (og i eksempel 3.1c ovenfor) har vi satt inn et absoluttverditegn i løsningen:

$$\int \tfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$$

I neste avsnitt om integrasjon med delbrøkoppspalting får vi bruk for en mer generell formel:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C\,.$$

Vi skal nå utlede denne formelen og forklare hvor absoluttverditegnet kommer fra.

Anta først at $x-a>0$. Da substituerer vi

$$u = x-a \quad \Rightarrow \quad dx = du$$

slik at integralet blir

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C = \underline{\ln(x-a)+C}\,.$$

Så antar vi at $x-a<0$. Vi substituerer

$$u(x) = -(x-a)$$

(merk at *u* blir positiv). Da blir

$$dx = -du$$

slik at

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{-(x-a)}(-dx) = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C = \underline{\ln\left(-(x-a)\right)+C}\,.$$

Men $-(x-a)$ blir positiv når $x-a<0$. Samler vi resultatene får vi at

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C\,.$$

Nå har du alt du trenger til å gå løs på integrasjon med delbrøkoppspalting. Deretter står delvis integrasjon for tur. Men du skal være klar over at det fins en mengde varianter av disse metodene som vi ikke går inn på i disse grunnleggende notatene. Jeg har samlet et par slike teknikker (pluss litt til) i et eget notat om mer avanserte integrasjonsteknikker.