8. Numerisk integrasjon.

81. Innledning.

Integrasjonsteorien tok utgangspunkt i at vi kan dele et areal opp i tynne striper, og summere arealene av disse stripene. De numeriske metodene vi skal se på, bygger på samme prinsipp.

Utgangspunktet kan være at vi ønsker å beregne arealet som avgrenses av grafen til en funksjon $y = f(x)$, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$, men at vi ikke klarer å beregne det ubestemte integralet $\int f(x)\,dx$. Vi deler da intervallet $[a, b]$ opp i n like store deler slik at vi får $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n = b$. Videre beregner vi funksjonsverdiene $y_a = f(a)$, $y_1 = f(x_1), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots, y_b = f(b)$.

Utgangspunktet kan også være at vi ikke kjenner noe funksjonsuttrykk $y = f(x)$, men at vi kjenner funksjonsverdiene $y_a, y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_b$ for eksempel på grunnlag av målinger.

Planen vår er nå å finne et mest mulig nøyaktig uttrykk for arealet av hver stripe, og deretter summere alle disse bidragene. Vi skal se på 3 metoder som gir stadig bedre nøyaktighet uten særlig øking i regnearbeid: ***Rektangel-metoden***, ***trapes-metoden***, og ***Simpsons formel***.

For alle tre metodene skal vi forutsette at y-verdiene er gitt i en tabell som vist i eksemplet nedenfor. Der bruker vi funksjonsverdiene til

$$y = \sqrt{x} \text{ for } x = 1,\ x = 2,\ \ldots,\ x = 8,\ x = 9,$$

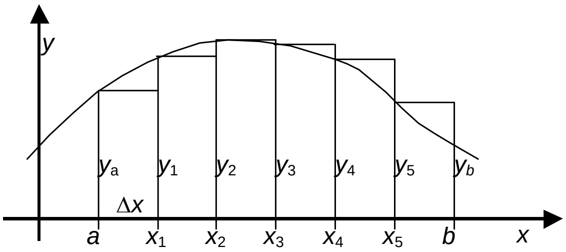
i alt $n = 8$ intervaller som hvert har bredde $\Delta x = 1$. På denne måten kan vi sammenlikne resultatet med eksakt verdi, som er

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \tfrac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \tfrac{2}{3}(27-1) = \underline{\underline{\tfrac{52}{3}}} \approx \underline{\underline{17.333}}.$$

Tabellverdier:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1.000	1.414	1.732	2.000	2.236	2.449	2.646	2.828	3.000

8.2. Rektangel-metoden.



Prinsippet er at arealet deles opp i n like brede *rektangler* med bredde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Summen av arealene av disse rektanglene er

$$S = y_a \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + \cdots + y_{n-1} \cdot \Delta x = \left(y_a + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right) \cdot \Delta x$$

$$= \underline{\underline{\frac{b-a}{n} \cdot \left(y_a + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right)}}$$

Med tallene i vårt eksempel får vi

$$S = \frac{9-1}{8}\left(1.000 + 1.414 + \cdots + 2.646 + 2.828\right) = \underline{\underline{16.305}}.$$

I formelen ovenfor har vi brukt y_{i-1} som høyde til rektangel nr i. Vi kunne like godt brukt y_i som høyde til rektangel nr i. Da ville formelen blitt

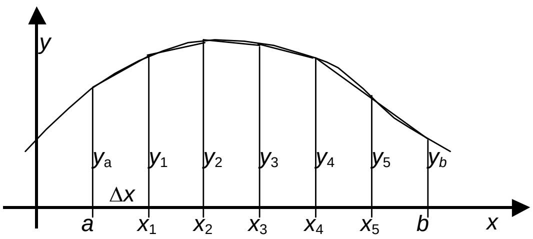
$$S = y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \cdots + y_n \cdot \Delta x = \left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right) \cdot \Delta x$$
$$= \underline{\underline{\frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right)}}$$

Med tallene i vårt eksempel får vi da

$$S = \frac{9-1}{8}\left(1.414 + 1.732 \cdots + 2.828 + 3.000\right) = \underline{\underline{18.305}}.$$

Du ser at disse to formlene ikke gir samme resultat. Vi kan forbedre resultatet ved å bruke gjennomsnittet av verdiene som de to formlene gir (se den eksakte verdien vi har funnet foran), eller ved å bruke en funksjonsverdi midt i rektangelet som høyde til rektangelet. I praksis bruker vi heller en av de bedre metodene som vi skal komme til nå.

8.3. Trapes-metoden.



Vi bruker nå *trapes* istedenfor rektangler når vi skal finne tilnærmet verdi av arealene av hver stripe. Arealet av trapes nr. n er

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\left(y_{n+1} + y_n\right) \cdot \Delta x,$$

slik at det samlede arealet blir

$$S = \tfrac{1}{2}\left(y_a + y_1\right)\Delta x + \tfrac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right)\Delta x + \tfrac{1}{2}\left(y_2 + y_3\right)\Delta x + \cdots + \tfrac{1}{2}\left(y_{n-2} + y_{n-1}\right)\Delta x + \tfrac{1}{2}\left(y_{n-1} + y_b\right)\Delta x$$
$$= \tfrac{\Delta x}{2} \cdot \left(\left(y_a + y_1\right) + \left(y_1 + y_2\right) + \left(y_2 + y_3\right) + \cdots + \left(y_{n-2} + y_{n-1}\right) + \left(y_{n-1} + y_b\right)\right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{b-a}{2n} \cdot \left(y_a + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_b\right)}}$$

Med tallene i vårt eksempel får vi nå

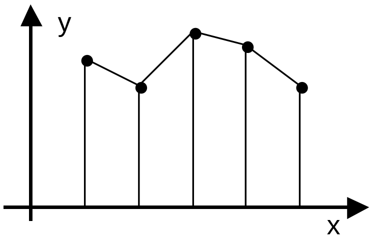
$$S = \frac{9-1}{2 \cdot 8}\left(1.000 + 2 \cdot 1.414 + 2 \cdot 1.732 \cdots + 2 \cdot 2.828 + 3.000\right) = \underline{\underline{17.306}}.$$

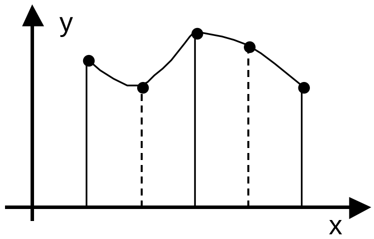
Og dette er en mye bedre tilnærming enn vi fikk med rektangelmetoden.

Legg merke til hvordan summen i parentesen framkommer: Alle y-verdiene multipliseres med 2, unntatt de to y-verdiene i endepunktene som multipliseres med 1. Dette er et eksempel på en *vektet sum*, der vekttallene er 1 for ende-verdiene og 2 ellers.

Trapesmetoden egner seg godt til regneark.

8.4. Simpsons formel.





Trapes-metoden gikk altså ut på at vi trakk rette linjer mellom nabo-punkter i grafen og beregnet arealet av stripene under disse rette linjene. Se figuren over til venstre. *Simpsons formel* framkommer ved at vi ser to nabo-striper under ett. Vi får da *tre* punkter som vi bruker til å tilpasse en *andregradsfunksjon*. Arealet under denne andregrads-grafen blir da som regel en meget god tilnærming til det virkelige arealet av stripeparet. Så legger vi sammen arealene av alle disse stripeparene, og får etter en litt omstendelig utledning:

Simpsons formel:
Når intervallet fra $x = a$ til $x = b$ deles inn i $2n$ intervaller med lengde

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n},$$

er

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_a + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_b\right).$$

Legg merke til at:

- Arealet deles i $2n$ striper (eller i n stripe*par*).
- Vekttallene er vekselvis 2 og 4, unntatt i endepunktene der vekttallene er 1.

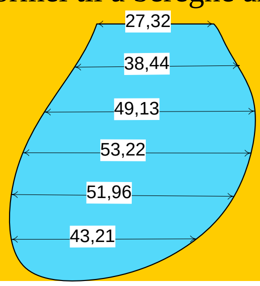
Med tallene i vårt eksempel får vi

$$S = \frac{9-1}{6\cdot 4}\left(1.000 + 4\cdot 1.414 + 2\cdot 1.732 \cdots + 4\cdot 2.828 + 3.000\right) = \underline{\underline{17.332}}\,.$$

Og dette er en svært god tilnærming til den eksakte verdien som er 17.333.

Også Simpsons formel egner seg godt for regneark.

Eksempel 8.1: Figuren nedenfor viser et flyfoto av et vann. Du vil bestemme arealet av vannet, og måler strekninger fra bredd til bredd med 10 meters mellomrom. Bruk Simpsons formel til å beregne arealet av vannet.



Løsning: Vi har 6 stripepar, slik at $n = 3$. Med 10 meters bredde av hver stripe, gir Simpsons formel

$$A = \frac{6\cdot 10}{6\cdot 3}\left(27.32 + 4\cdot 38.44 + 2\cdot 49.13 + \cdots + 4\cdot 43.21 + 0\right)$$
$$= \underline{\underline{2563.27}}$$

Oppgave 8.1, **Oppgave 8.2**.