6. Mer avanserte integrasjonsteknikker.

Dersom du virkelig vil beherske integrasjon, må du nok kjenne til flere integrasjonsmetoder enn de vi har gått gjennom hittil. I dette notatet skal vi se på noen mer avanserte metoder. Du vil imidlertid oppdage at det ikke er de store prinsipielle nyhetene i dette avsnittet. Det er stort sett nye anvendelser av allerede kjente teknikker.

6.1. Integrasjon av rasjonale funksjoner.

Vi skal nå se nærmere på hvordan du går fram for å integrere funksjoner av typen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer i *x*.

Dersom $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$, foretar du først en polynomdivisjon slik at du får et polynom pluss en brøk der telleren har lavere grad enn nevneren. Deretter spaltes denne brøken opp i delbrøker. Disse er vanligvis greie å integrere unntatt dersom du får andregrads-polynom i nevneren som ikke lar seg faktorisere i reelle førstegradsfaktorer. Vi skal derfor se på ”problem-integral” av typen

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx\,.$$

La oss først anta at $A=0$, slik at vi har integral av typen

$$\int \frac{B}{ax^2+bx+c}\,dx\,.$$

Slike integral løses ved å benytte at

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan u + C$$

Framgangsmåten er illustrert i eksemplet nedenfor.

Eksempel 6.1. Beregn integralet

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx\,.$$

Løsning: Vi merker oss at nevneren ikke kan faktoriseres i reelle førstegradsfaktorer. Vi omformer da nevneren slik:

$$x^2-4x+13 = \left(x^2-4x+4\right)+9 = (x-2)^2+9\,.$$

Vårt første mål er nå å få et 1-tall som konstantledd i nevneren. Integralet omformes derfor til

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{1}{9}(x-2)^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx\,.$$

Nå substituerer vi

$$u = \frac{x-2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad dx = 3du\,.$$

Da blir

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\cdot 3du = \frac{1}{3}\arctan u + C$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)+C}}$$

Nå er det på tide å ta med førstegradsleddet i telleren, slik at integralet er av formen

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx .$$

Hvis vi er riktig heldige, er telleren lik den deriverte av nevneren, eventuelt multiplisert med en konstant. Dersom det er tilfelle, kan vi substituere $u(x) = ax^2+bx+c$, og hele integralet reduseres til

$$\int \frac{1}{u}du = \ln u + C .$$

Så heldig er vi vanligvis ikke. Men kanskje vi kan trikse litt med telleren slik at vi blir så heldige? Eksemplet nedenfor viser hvordan vi kan gå fram.

Eksempel 6.2: Beregn integralet

$$\int \frac{4x+1}{x^2-4x+13}dx .$$

Løsning: Vi setter

$$u(x) = x^2-4x+13 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad du = (2x-4)dx .$$

Dessverre står det ikke $2x-4$ i telleren i integralet vårt. Men det fikser vi fort:

$$4x+1 = 4x-8+9 = 2(2x-4)+9 .$$

Da blir

$$\int \frac{4x+1}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{2(2x-4)+9}{x^2-4x+13}dx = 2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx + 9\int \frac{1}{x^2-4x+13}dx$$
$$= 2\int \frac{du}{u} + 9\cdot\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$$
$$= \underline{\underline{2\ln\left(x^2-4x+13\right)+3\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)+C}}$$

Under veis har vi benyttet resultatet fra Eksempel 6.1.

Oppgave 6.1.

Vi avslutter med et skikkelig beist av et eksempel, der vi får bruk for alle våre teknikker:

Eksempel 6.3: Beregn integralet

$$\int \frac{x^4+2x^3+12x^2-46x-20}{x^3+4x^2+20x}dx$$

Løsning: Vi ser at telleren har høyere grad enn nevneren. Vi må derfor starte med en polynomdivisjon:

$$\left(x^4+2x^3+12x^2-46x-20\right):\left(x^3+4x^2+20x\right)=x-2+\frac{-6x-20}{x^3+4x^2+20x}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-\left(x^4+4x^3+20x^2\right)} \\
\quad -2x^3-8x^2-46x-20 \\
\quad \underline{-\left(-2x^3-8x^2-40x\right)} \\
\qquad\qquad -6x-20
\end{array}$$

Så må den siste brøken delbrøkoppspaltes:

$$\frac{-6x-20}{x^3+4x^2+20x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+20}=\frac{A\left(x^2+4x+20\right)+\left(Bx+C\right)x}{x^3+4x^2+20x}$$
$$=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(4A+C\right)x+20A}{x^3+4x^2+20x}$$

Dette gir likningene

$$\begin{array}{llll}
A & +B & & =0 \\
4A & & +C & =-6 \\
20A & & & =-20
\end{array}$$

Disse likningene nøstes opp nedenfra:

$$20A=-20 \quad\Leftrightarrow\quad A=\underline{-1}.$$
$$4A+C=-6 \quad\Leftrightarrow\quad C=-6-4\cdot\left(-1\right)=\underline{-2}.$$
$$A+B=0 \quad\Leftrightarrow\quad B=-A=\underline{1}.$$

Dermed har vi at

$$\int \frac{x^4+2x^3+12x^2-46x-20}{x^3+4x^2+20x}dx=\int \left(x-2\right)dx-\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{x-2}{x^2+4x+20}dx.$$

Her er det bare det siste integralet som gir oss problemer. Den naturlige substitusjonen er

$$u\left(x\right)=x^2+4x+20 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{du}{dx}=2x+4 \quad\Leftrightarrow\quad du=\left(2x+4\right)dx.$$

Nå må vi trikse litt med telleren:

$$x-2=\tfrac{1}{2}\left(2x-4\right)=\tfrac{1}{2}\left(2x+4-8\right)=\tfrac{1}{2}\left(2x+4\right)-4$$

slik at

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+20}dx=\int \frac{\tfrac{1}{2}\left(2x+4\right)}{x^2+4x+20}dx-\int \frac{4}{x^2+4x+20}dx.$$

Det første av disse integralene løses nå direkte:

$$\int \frac{\tfrac{1}{2}\left(2x+4\right)}{x^2+4x+20}dx=\tfrac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\ln u+C=\underline{\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+20\right)+C}.$$

Det siste av disse integralene er mer plundrete. Vi omformer først nevneren slik:

$$x^2+4x+20=\left(x^2+4x+4\right)+16=\left(x+2\right)^2+16=16\left(\tfrac{\left(x+2\right)^2}{16}+1\right)=16\left(\left(\tfrac{x+2}{4}\right)^2+1\right)$$

slik at

$$\int \frac{4}{x^2+4x+20}dx = \int \frac{4}{16\left(\left(\frac{x+2}{4}\right)^2+1\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{4}\right)^2+1}dx = \frac{1}{\cancel{4}}\int \frac{\cancel{4}du}{u^2+1}$$

$$= \arctan u + C = \underline{\arctan\left(\tfrac{x+2}{4}\right)+C}$$

Her har vi substituert

$$u(x) = \frac{x+2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad dx = 4du\,.$$

Nå gjenstår det bare å samle trådene:

$$\int \frac{x^4+2x^3+12x^2-46x-20}{x^3+4x^2+20x}dx = \int (x-2)\,dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x-2}{x^2+4x+20}dx$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x^2 - 2x - \ln x + \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+20\right) - \arctan\left(\tfrac{x+2}{4}\right)+C}}$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + \ln\frac{\sqrt{x^2+4x+20}}{x} - \arctan\left(\tfrac{x+2}{4}\right)+C}}$$

Oppgave 6.2.

6.2. Integralet kan løses av en likning.

Noen ganger hender det at når vi prøver å løse et integral, ender vi opp med at det integralet vi skal løse, inngår i en likning. Da finner vi integralet ved å løse likningen. Nedenfor ser du et eksempel på en slik situasjon.

Eksempel 6.4: Beregn integralet

$$\int e^x \sin x\, dx\,.$$

Løsning: Integranden er et produkt. Da er det naturlig å prøve delvis integrasjon.

$$u'(x) = e^x \quad \Leftarrow \quad u(x) = e^x$$

$$v(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \cos x$$

$$\int \overset{u'}{e^x}\overset{v}{\sin x}\,dx = \overset{u}{e^x}\cdot\overset{v}{\sin x} - \int \overset{u}{e^x}\cdot\overset{v'}{\cos x}\,dx\,.$$

Det gikk ikke i første omgang. La oss prøve delvis integrasjon en gang til for å løse det gjenværende integralet:

$$u'(x) = e^x \quad \Leftarrow \quad u(x) = e^x$$

$$v(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = -\sin x$$

$$\int \overset{u'}{e^x}\overset{v}{\cos x}\,dx = \overset{u}{e^x}\cdot\overset{v}{\cos x} - \int \overset{u}{e^x}\cdot\left(\overset{v'}{-\sin x}\right)dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx\,.$$

Fremdeles er vi ikke i mål. Det ser faktisk ut som om vi går i ring og kommer tilbake til utgangspunktet. Men se hva som skjer når vi setter sammen det vi har funnet hittil:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\,dx &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cos x\,dx \\ &= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right) \\ &= e^x \cdot \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx\end{aligned}$$

Men dette er jo en likning som vi kan løse $\int e^x \sin x\,dx$ ut av! Vi samler begge integral-leddene på venstre side og får

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \int e^x \sin x\,dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right)}}.$$

En integrasjonskonstant bør føyes til etterpå.

Oppgave 6.3.

6.3. Trigonometrisk substitusjon.

Når vi har benyttet substitusjon, har vi alltid plukket ut en kjerne u som er en funksjon av x. Men vi kan også gjøre det motsatt: La x være en funksjon av en ny variabel t! Ofte lar vi x være en trigonometrisk funksjon. Metoden kalles derfor ofte *trigonometrisk substitusjon*. Neste eksempel viser hvordan metoden kan virke.

Eksempel 6.5: Beregn integralet

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Løsning: Vi prøver substitusjonen

$$x = x(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad \Leftrightarrow \quad dx = \cos t\,dt.$$

Da blir

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Innsetting gir

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos t \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt.$$

Dessverre har vi ingen integrasjonsformel for $\int \cos^2 t\,dt$. Men vi bruker en velkjent (?) trigonometrisk formel:

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2t).$$

Da blir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 t\,dt = \int \tfrac{1}{2}dt + \tfrac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin u + C = \underline{\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t) + C}\end{aligned}$$

Under veis har vi benyttet substitusjonen

$$u(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad du = 2dt.$$

Nå gjenstår det å gjeninnføre x. Vi benytter først at

$$x = \sin t \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin x.$$

Videre benytter vi at

$$\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}\ .$$

Vi samler trådene, og får

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t) + C = \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{4}\cdot 2x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C}}$$

Vi tar et mer intrikat eksempel, der vi illustrerer noen av de problemene vi kan komme bort i når vi jobber med trigonometrisk substitusjon.

Eksempel 6.6: Beregn integralet

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx\ .$$

Løsning: Her må vi bruke den trigonometriske substitusjonen

$$x = \tan t\ .$$

Da blir

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}\ .$$

Videre blir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt\ .$$

Vi setter alt dette inn i integralet, og får

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{\sin t}\,dt\ .$$

Hvis du tror at problemene nå er over, tar du helt feil. Det er nå de begynner. For å løse dette integralet, starter vi med å multiplisere teller og nevner med $\sin t$. Da får vi

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt\ .$$

Nå substituerer vi

$$v = \cos t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\sin t \quad \Leftrightarrow \quad -dv = \sin t\,dt$$

og får

$$\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt = \int \frac{-dv}{1-v^2} = \int \frac{dv}{(v+1)(v-1)}$$

$$= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{v+1} + \frac{\frac{1}{2}}{v-1}\right)dv = -\tfrac{1}{2}\ln|v+1| + \tfrac{1}{2}\ln|v-1| + C = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right| + C = \underline{\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right) + C}$$

Her har jeg utelatt detaljer i delbrøkoppspaltingen. I den siste overgangen benytter jeg at $-1 \le \cos t \le 1$ slik at $\cos t - 1$ alltid er negativ (eller null) mens $\cos t + 1$ alltid er positiv (eller null).

Neste problem er å gjeninnføre x. Da benytter vi at

$$x^2 = \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad x^2\cos^2 t = 1-\cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2\cos^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2+1\right)\cos^2 t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Dermed blir

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right) + C = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right) + C = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)-1}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2}{x^2} + C = \ln\left(\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\underline{\underline{= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}\right) + C}}$$

Oppgave 6.4.