Integrasjon.

1. De grunnleggende definisjonene.

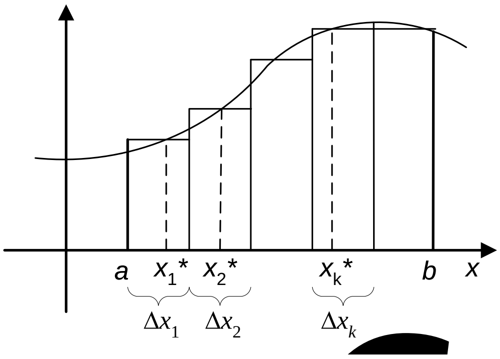
La oss starte med følgende problem:

> Gitt en kontinuerlig funksjon $y = f(x)$ der $f(x) \geq 0$ for $x \in [a, b]$.
> Beregn arealet *A* som er avgrenset av grafen til *f*, *x*-aksen, og de to vertikale linjene $x = a$ og $x = b$.

Vi kan finne en *tilnærmet* verdi for arealet *A* ved følgende prosedyre (se figuren til høyre):
Del opp *x*-aksen i *n* korte stykker med lengder

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \dots,\ \Delta x_k,\ \dots,\ \Delta x_n .$$

La x_k^* være en *vilkårlig* *x*-verdi i Δx_k.
Konstruer *n* rektangler der rektangel *k* har grunnlinje Δx_k og høyde $f(x_k^*)$.



Arealet av dette rektangelet er $f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$.
Summen av arealene av alle de *n* rektanglene er da tilnærmet lik arealet *A*:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k .$$

Det er innlysende at jo smalere rektanglene er, jo bedre er tilnærmelsen. Det er nå rimelig å anta at dersom vi lar $n \to \infty$ samtidig som *alle* strekningene Δx_k går mot null, vil summen ovenfor konvergere mot *A*. Mer inngående undersøkelser (som er alt for omfattende til at vi skal gjennomføre dem) viser at vår antakelse er korrekt. Denne grensen for summen kalles ***integralet av f fra a til b***, og skrives

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

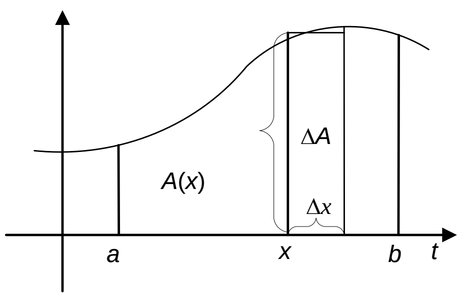
Vi har altså at

Integralet av f fra a til b er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \cdot \Delta x_k .$$

Foreløpig har vi bare *definert* hva vi mener med et integral. Men hvordan *beregner* vi et integral?

Nok en gang skal vi vende tilbake til arealet som vi definerte i innledningen. Men nå skal vi la *t* være fri variabel, og vil skal la $A(x)$ være arealet som avgrenses av *t*-aksen, grafen til *f*, og de to rette linjene $t = a$ og $t = x$ der $x > a$. Se figuren til høyre.



Vi lar nå x øke med en *liten* størrelse Δx. Da vil arealet øke med en *liten* størrelse

$$\Delta A \approx f(x)\cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x).$$

Hvis vi nå lar $\Delta x \to 0$, skjer to ting. Først benytter vi definisjonen av derivert til å sette at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA(x)}{dx}.$$

Dernest er det rimelig å anta at når $\Delta x \to 0$, kan $\approx$ erstattes av =. Også her viser en nærmere undersøkelse at denne antakelsen er korrekt. Følgelig har vi at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Vi har altså vist den fundamentale sammenhengen:

Når $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, er $\dfrac{dA(x)}{dx} = f(x)$.

Med andre ord: for å finne arealet, trenger vi ”bare” å finne en eller annen funksjon $A(x)$ som er slik at

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Men det er en liten komplikasjon: Du kan legge til en vilkårlig konstant til $A(x)$, og få den samme funksjonen f fordi konstanten faller bort ved derivasjonen. Dette problemet løses ved å innføre en *vilkårlig* funksjon $F(x)$ som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Da er

$$A(x) = F(x) + C.$$

Men av figuren er det opplagt at når $x = a$ blir arealet lik null, slik at

$$A(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(a) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -F(a).$$

Dermed har vi at

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Nå lar vi øvre grense være b istedenfor x, og gjeninnfører x som fri variabel. Da har vi at:

Gitt en funksjon f der $f(x) \geq 0$ når $x \in [a,b]$.
Det arealet som avgrenses av grafen til f, x-aksen, og de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

der F er en vilkårlig funksjon som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Nå viser det seg at vi har bruk for slike beregninger til mye annet enn den arealberegningen som vi innledet med. Vi definerer derfor:

Gitt en funksjon $y = f(x)$.
Det ***ubestemte integralet*** av *f* er

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

der $F(x)$ er en vilkårlig funksjon som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Det ***bestemte integralet*** av *f* er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Eksempel 1.1: Bestem arealet som avgrenses av *x*-aksen, grafen til $y = f(x) = x$, og linjene $x = 2$ og $x = 4$.

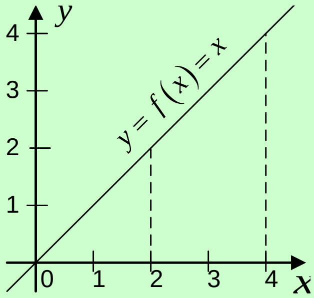
Løsning: Vi må først finne en funksjon $F(x)$ som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = x.$$

Vi ser at enhver funksjon av typen

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

der *C* er en konstant tilfredsstiller dette kravet.
Da er arealet bestemt ved



$$A = \int_2^4 x\,dx = F(4) - F(2) = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 + C\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + C\right) = 8 - 2 = \underline{\underline{6}}.$$

2. Grunnleggende integrasjonsregler.

På grunnlag av definisjonene ovenfor kan vi sette opp mange integrasjonsregler. La oss ta dem i systematisk rekkefølge.

2.1. Generelle regler for bestemte integral.

Av definisjonen på bestemt integral som grense for en sum virker reglene nedenfor ganske innlysende:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ når } a < c < b.$$

2.2. Generelle regler for ubestemte integral.

Den teknikken vi benytter for å beregne et ubestemt integral, kan brukes til å vise at reglene nedenfor gjelder:

La c være en konstant, mens f og g er to funksjoner. Da gjelder:

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2.3. Integrasjon av enkle funksjoner.

Siden $\int f(x)\,dx = F(x)$ der $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, kan vi bruke kjente derivasjonsregler til å sette opp disse integrasjonsreglene:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{når } n \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

Den første av disse reglene gjelder for *alle* verdier av n unntatt for $n = -1$. Eksempel b) og c) nedenfor viser to viktige anvendelser av denne regelen.

***Eksempel 2.1*:** Beregn integralene nedenfor:

a) $\int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

d) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

Løsning:

a) $\int_0^3 (x^2-2x+2)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - 2\int_0^3 x\,dx + 2\int_0^3 1\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 - 2\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^3 + 2\left[x\right]_0^3$

$= \tfrac{1}{3}(3^3-0^3) - 2\cdot\tfrac{1}{2}(3^2-0^2) + 2(3-0) = 9-9+6 = \underline{\underline{6}}$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^2 x^{-2}dx = \left[\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_1^2 = -1\left(2^{-1}-1^{-1}\right) = -1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

c) $\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1^3\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$

d) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}dx = \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}dx = \int_1^2\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 x\,dx + \int_1^2 2dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx$

$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 + \left[2x\right]_1^2 + \left[\ln x\right]_1^2 = \tfrac{1}{2}(2^2-1^2) + 2(2-1) + (\ln 2 - \ln 1)$

$= \tfrac{1}{2}\cdot 3 + 2\cdot 1 + \ln 2 - 0 = \underline{\underline{\tfrac{7}{2}+\ln 2}}$

Oppgave 2.1.

Vi avslutter denne innledningen der vi startet: Vi beregner areal.

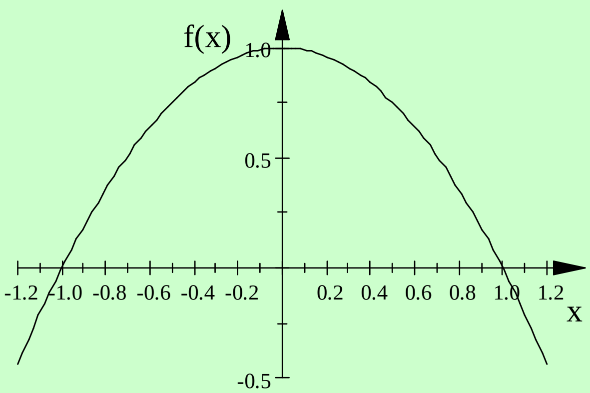
Eksempel 2.2**:** Beregn arealet som avgrenses av grafen til f og x-aksen når:

a) $f(x) = 1-x^2$.

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{når} \quad x<2 \\ 3-\tfrac{1}{2}x & \text{når} \quad x \ge 2 \end{cases}$

Løsning:

a) Vi starter med å tegne grafen til f:



Vi må finne skjæringspunktene med x-aksen:

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=-1 \vee x=1}$$

noe som også stemmer med grafen. Da blir arealet:

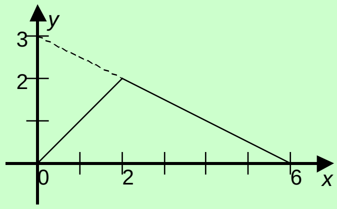
$$A = \int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx = \int_{-1}^1 1dx - \int_{-1}^1 x^2 dx$$

$$= [x]_{-1}^1 - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1$$

$$= 1-(-1) - \tfrac{1}{3}\left(1^3-(-1)^3\right)$$

$$= 2 - \tfrac{1}{3}\cdot 2 = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}}}$$

b) Vi starter med å tegne grafen til *f*:



Grafen skjærer *x*-aksen når $x = 0$. Den skjærer også *x*-aksen når

$$3 - \tfrac{1}{2}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$$

noe som stemmer med grafen.
Videre har vi et knekkpunkt når $x = 2$. Da blir arealet:

$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx + \int_2^6 \left(3 - \tfrac{1}{2}x\right)dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \left[3x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^6$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2^2 - 0^2\right) + 3(6-2) - \tfrac{1}{4}\left(6^2 - 2^2\right) = \tfrac{1}{2}\cdot 4 + 3\cdot 4 - \tfrac{1}{4}\cdot 32 = \underline{\underline{6}}$$

Oppgave 2.2.

Du kommer ikke langt med bare de reglene vi har sett på hittil. I tillegg må du kunne noen viktige ***integrasjonsteknikker***:

Substitusjon er et knippe med beslektede teknikker, der hovedpoenget er at integrasjons-variabelen *x* byttes ut med en annen variabel eller funksjon som gir et integral som er lettere å hanskes med.
Delbrøkoppspalting er en standard teknikk når vi skal integrere en rasjonal funksjon.
Delvis integrasjon kan benyttes når integranden er et produkt av to faktorer. Hvis vi er heldige og dyktige, kan vi da skaffe oss et annet integral som er enklere enn det opprinnelige.

Det fins en mengde varianter av diss teknikkene. Noen ganger kan flere teknikker føre til målet. Det er imidlertid mer vanlig at du må løse problemene i flere trinn, der du benytter flere teknikker etter tur for å omforme kompliserte integral til stadig enklere integral som du til slutt klarer å løse.

I dag har vi dataverktøy til disposisjon som kan beregne integral. Behovet for å kunne beregne kompliserte integral er derfor mindre enn før. Men det er likevel nyttig å beherske teknikken. Du bør derfor se på et lite notat om mer avanserte integrasjonsteknikker.

Noen ganger kommer du bort i problemer der en eller begge grensene går mot uendelig, eller problemer der integranden selv går mot uendelig. Slike problemer kalles gjerne *uegentlige integral*, og du bør vite hvordan du skal gå fram for å løse dem.

I de fleste tilfellene fins det ingen standard metoder som med sikkerhet fører til målet. Du må forene erfaring og kreativitet for å løse integral som ikke lar seg løse direkte. Noen har sagt at mens derivasjon er ren teknikk, så er integrasjon kunst. Når du behersker mest mulig av denne kunsten, kan du se på et lite utvalg anvendelser av integrasjon.

Selv om du blir aldri så flink til å integrere, må du nok innse at det fins noen integral som ikke lar seg løse eksakt. Da kan du få tilnærmede løsninger av bestemte integral ved å benytte *numerisk integrasjon*. Slike metoder må også benyttes dersom du ikke kjenner integranden som en *funksjon*, men bare kjenner punkter på funksjonsgrafen.