5. Delvis integrasjon.

Dette er en integrasjonsteknikk som kan benyttes når integranden er et produkt av to faktorer, der den ene faktoren kan oppfattes som den deriverte av en kjent funksjon. Da gjelder:

$$\boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx}$$

Utledning: Vi tar utgangspunkt i den kjente derivasjonsformelen for et produkt:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \quad \Leftrightarrow \quad u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

der det er underforstått at *u* og *v* er funksjoner av *x*. Denne derivasjonsregelen integreres, samtidig som vi benytter at

$$\int (u\cdot v)'dx = u\cdot v\,.$$

Da får vi regelen i ramma ovenfor.

Når vi ønsker å bruke denne regelen, ser vi om integranden inneholder en faktor som er den deriverte av en kjent funksjon $u(x)$, samtidig som produktet $u(x)\cdot v'(x)$ lar seg integrere. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

***Eksempel 5.1*:** Beregn disse integralene:

a) $\int x\cdot e^x dx$

b) $\int x\cdot \sin x dx$

c) $\int \ln x\, dx$

Løsning:

a) Her lønner det seg å velge $u(x)$ og $v(x)$ slik:

$$u'(x) = e^x \quad \Leftarrow \quad u(x) = \int e^x dx = e^x$$

$$v(x) = x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 1$$

Da får vi:

$$\int \overset{v}{x}\cdot \overset{u'}{e^x}\, dx = \overset{v}{x}\cdot \overset{u}{e^x} - \int \overset{v'}{1}\cdot \overset{u}{e^x}\, dx = \underline{\underline{x\cdot e^x - e^x + C}}\,.$$

b) Her lønner det seg å velge

$$u'(x) = \sin x \quad \Leftarrow \quad u(x) = \int \sin x = -\cos x$$

$$v(x) = x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 1$$

Da får vi:

$$\int \overset{v}{x}\cdot \overset{u'}{\sin x}\, dx = \overset{v}{x}\cdot \overset{u}{(-\cos x)} - \int \overset{v'}{1}\cdot \overset{u}{(-\cos x)}\, dx = -x\cdot\cos x + \int \cos x dx$$

$$= \underline{\underline{-x\cdot\cos x + \sin x + C}}\,.$$

c) Her er integranden tilsynelatende ikke noe produkt. Men hvis vi oppfatter integralet slik:

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln dx$$

får vi et produkt. Da velger vi:

$$u'(x) = 1 \quad \Leftarrow \quad u(x) = \int 1 dx = x$$

$$v(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \tfrac{1}{x}$$

Da får vi:

$$\int \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\ln x}\, dx = \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\ln x} - \int \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{\tfrac{1}{x}} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = \underline{\underline{x \cdot \ln x - x + C}}.$$

Noen ganger må vi bruke teknikken flere ganger etter hverandre slik eksemplet nedenfor viser. Eksemplet viser også at når vi har et bestemt integral, løser vi først det ubestemte integralet fullt ut før vi setter inn grensene.

***Eksempel 5.2*:** Beregn integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx.$$

Løsning: Her lønner det seg å velge

$$u'(x) = \cos x \quad \Leftarrow \quad u(x) = \int \cos x\, dx = \sin x.$$

$$v(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 2x.$$

Da får vi:

$$\int \overset{v}{x^2} \cdot \overset{u'}{\cos x}\, dx = \overset{v}{x^2} \cdot \overset{u}{\sin x} - \int \overset{v'}{2x} \cdot \overset{u}{\sin x}\, dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x\, dx.$$

Det siste integralet løses også med delvis integrasjon. Dette er allerede gjort i del b) i forrige eksempel. Vi setter inn resultatet derfra, og får

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x + C)$$

$$= \underline{\underline{x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x - 2C}}$$

Så setter vi inn grensene. Da kan vi se bort fra konstanten (mer presist: Når vi setter inn grensene, vil vi legge til og trekke fra konstanten). Resultatet blir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx = \left[x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2} \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 0 \cdot \sin(0) - 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2\sin(0)$$

$$= \tfrac{\pi^2}{4} \cdot 1 + \pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{\tfrac{\pi^2}{4} - 2}}$$

Oppgave 5.1.

Nå som du har vært gjennom de grunnleggende teknikkene, bør du løse noen blandede oppgaver i **Oppgave 5.2**. Jeg vil også sterkt anbefale at du går gjennom notatet om mer avanserte integrasjonsteknikker.