4. Integrasjon med delbrøkoppspalting.

I notatet om substitusjon viste vi at

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$$

Du behersker sikkert så pass mye brøkregning at du ser at

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1} = \frac{1\cdot(2x+1) - 2\cdot(x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{2x+1-2x+2}{2x^2+x-2x-1} = \underline{\frac{3}{2x^2-x-1}}.$$

Dermed har du alt du trenger til å løse integralet i eksemplet nedenfor:

Eksempel 4.1: Beregn integralet

$$\int \frac{3}{2x^2-x-1}\,dx.$$

Løsning: Du vet allerede at

$$\frac{3}{2x^2-x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1}.$$

Da blir

$$\int \frac{3}{2x^2-x-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{2}{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \underline{\underline{\ln|x-1| - \ln|x+\tfrac{1}{2}| + C}} = \underline{\underline{\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{2}}\right| + C}}$$

I eksemplet ovenfor var vi heldige fordi den opprinnelige integranden allerede var spaltet opp i *delbrøker*. Vanligvis er vi ikke så heldige. Vi må da ty til *delbrøkoppspalting*.

***Eksempel 4.2*:** Beregn integralet

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx.$$

Løsning: Vi merker oss først at substitusjon ikke fører fram fordi den naturlige kjernen

$$u(x) = x^2 - 1$$

gir $du = 2x\,dx$ som ikke passer inn i integralet. Vi benytter derfor at

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$

og spalter integranden i delbrøker slik:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (-A+B)}{(x+1)(x-1)}$$

Men dette er egentlig en *identitet* som skal være oppfylt for *alle* verdier av *x*. Det er kun mulig dersom teller-polynomene er *identiske*. Dette gir likningene

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ -A+B&=2 \end{aligned}$$

Dette likningssystemet løses enkelt ved å legge sammen likningene. Da får vi

$$2B=2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{B=1}.$$

Fra den øverste likningen får vi nå

$$A+B=0 \quad\Leftrightarrow\quad A=-B=\underline{-1}$$

slik at

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\underline{\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}.$$

Nå er vi klare til å integrere:

$$\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C=\underline{\underline{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C}}.$$

Legg merke til at i notatet om delbrøkoppspalting er det demonstrert en ”snarvei” som kan benyttes når nevneren kan faktoriseres i *forskjellige* reelle førstegradsfaktorer, og som kunne spart oss for litt arbeid i eksemplet ovenfor. Denne snarveien kan dessverre ikke hjelpe oss i eksemplene nedenfor.

Oppgave 4.1.

Hvis nevneren inneholder en *gjentatt* førstegradsfaktor, kan delbrøkoppspaltingen foretas på flere måter. Jeg vil imidlertid anbefale den metoden som er vist i neste eksempel:

***Eksempel 4.3*:** Beregn integralet

$$\int\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}dx.$$

Løsning: Her gjentas faktoren $(x-1)$ to ganger. Det gunstigste er da å benytte delbrøk-oppspaltingen nedenfor:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}\equiv\frac{A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$\equiv\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx+Cx^2-Cx}{x(x-1)^2}\equiv\frac{(A+C)x^2+(-2A+B-C)x+A}{x(x-1)^2}$$

Siden dette er en *identitet*, må vi ha

$$\begin{aligned} A\qquad +C&=1 \\ -2A+B-C&=0 \\ A\qquad\quad&=2 \end{aligned}$$

Her nøster vi raskt opp løsningen, og finner

$$A=2,\qquad C=1-A=-1,\qquad B=C+2A=3.$$

Dermed blir

$$\int \frac{x^2+2}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{3}{x-1} - \ln|x-1| + C = \underline{\underline{\ln\frac{x^2}{|x-1|} - \frac{3}{x-1} + C}}$$

Integralet i midten løses med substitusjonen

$u = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad dx = du$:

$$\int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{3}{u^2}du = 3\int u^{-2}du = \frac{3}{-2+1}u^{-2+1} + C = -3u^{-1} + C = \underline{\frac{-3}{x-1} + C}.$$

Når nevneren inneholder andregradsfaktorer som ikke kan faktoriseres videre til reelle førstegradsfaktorer, lar vi telleren i delbrøken være et førstegradspolynom:

Eksempel 4.4: Beregn integralet

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}dx$$

Løsning: Faktoren x^2+1 kan ikke faktoriseres videre til reelle førstegradsfaktorer. Vi benytter derfor en delbrøk der telleren er et førstegradspolynom i *x*:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \equiv \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \equiv \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

Siden dette er en *identitet*, må vi ha

$A+B=0$.

$C=2$.

$A=-1$.

A og *C* er allerede kjent. Deretter blir $B=-A=1$. Delbrøkoppspaltingen blir da

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1}$$

som gir

$$\int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{2}{x^2+1}dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + C}}$$

Integralet i midten løses med substitusjonen

$u = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\cancel{x}}{u}\left(\frac{du}{2\cancel{x}}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

der absoluttverditegnene kan sløyfes fordi x^2+1 alltid er positiv.

Vi tar et større eksempel til slutt:

***Eksempel 4.5*:** Beregn integralet

$$\int \frac{2x}{x^4-1}dx$$

Løsning: Vi faktoriserer først nevneren i reelle faktorer:

$$x^4-1=\left(x^2\right)^2-1=\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right).$$

Vi prøver derfor delbrøkoppspaltingen nedenfor:

$$\frac{2x}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}.$$

Så setter vi høyre side av likhetstegnet på fellesnevner. Vi får:

$$\frac{2x}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=\frac{\left(Ax+B\right)\left(x^2-1\right)+C\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)+D\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}$$

$$=\frac{Ax^3-Ax+Bx^2-B+Cx^3-Cx^2+Cx-C+Dx^3+Dx^2+Dx+D}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}$$

$$=\frac{\left(A+C+D\right)x^3+\left(B-C+D\right)x^2+\left(-A+C+D\right)x+\left(-B-C+D\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}$$

For at dette skal være en identitet, må vi kreve at

$$\begin{array}{rrrrl} A & & +C & +D & =0 \\ & B & -C & +D & =0 \\ -A & & +C & +D & =2 \\ & -B & -C & +D & =0 \end{array}$$

Slike likningssett løses vanligvis lettest med matrisemetoder. Men her ser vi at dersom vi legger samme alle likningene, får vi

$$4D=2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{D=\tfrac{1}{2}}.$$

Legger vi sammen 2. og 4. likning, får vi

$$-2C+2D=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C=D=\tfrac{1}{2}}.$$

Da gir 1. likning

$$A=-C-D=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=\underline{-1}$$

mens 2. likning gir

$$B=C-D=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=\underline{0}.$$

Hele delbrøkoppspaltingen blir da

$$\frac{2x}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=\underline{\frac{-x}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}}.$$

Nå er vi klare til å integrere:

$$\int \frac{2x}{x^4-1}dx = \int \frac{-x}{x^2+1}dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \tfrac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + \tfrac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + C$$
$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C}}$$

Det første integralet beregnet vi med substitusjonen

$$u(x) = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x}du\ .$$

Da blir

$$\int \frac{-x}{x^2+1}dx = -\int \frac{\cancel{x}}{u}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}dx = -\tfrac{1}{2}\ln u + C = -\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C\ .$$

Oppgave 4.2.

Du finner mer om bl.a. slike integraler der nevneren inneholder andregradsfaktorer som ikke kan faktoriseres i reelle førstegradsfaktorer i et notat om mer avanserte integrasjonsteknikker. Men først bør du gå gjennom notatet om delvis integrasjon.