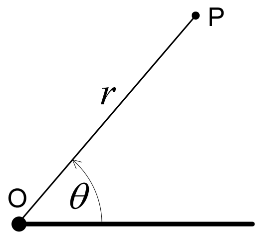
1. Polarkoordinater.

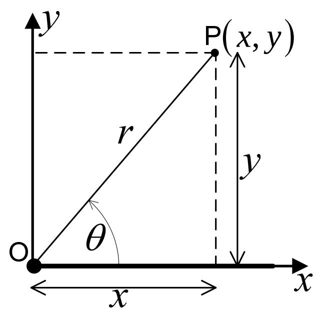


Noen ganger kan det være gunstig å bytte ut vårt velkjente kartesiske koordinatsystem med et annet koordinatsystem, basert på en linje og et punkt på denne linja. Linja kalles **polar akse**, mens punktet er koordinatsystemets **pol** (*origo*) O. Posisjonen til et vilkårlig punkt P angis ved to størrelser r og θ, der r er lengden av linjestykket OP mens θ er vinkelen mellom linja OP og den polare aksen. Se figuren til venstre.

Dersom vi kjenner r som funksjon av θ, $r = f(\theta)$, har vi en *polar funksjon*. Legg merke til:

- Vi kan legge til eller trekke fra $n \cdot 2\pi$ til vinkelen θ uten at r endrer verdi.
- Dersom $f(\theta)$ blir negativ (en "negativ" avstand), svarer det til en positiv avstand i motsatt retning, d.v.s. at vil øker eller minker θ med π.

Figuren nedenfor til venstre viser sammenhengen mellom polarkoordinater og kartesiske koordinater når den polare aksen faller sammen med x-aksen:



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Noen polare funksjoner er spesielt enkle:

- Funksjonen $r = r_0 = \text{konstant}$ framstiller en sirkel med radius r_0 og sentrum i origo.
- Funksjonen $\theta = \theta_0 = \text{konstant}$ framstiller ei rett linje gjennom origo som danner en vinkel θ_0 med x-aksen.

Generelt kan det være litt plundrete å gå over fra polar form til kartesisk form:

Eksempel 1.1: Vis at den polare funksjonen

$$r = 2\cos\theta$$

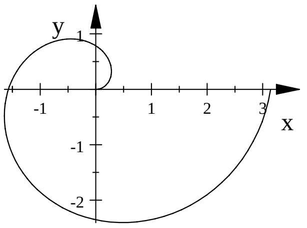
framstiller en sirkel med radius $R = 1$ og sentrum i punktet $(1,0)$.

Løsning: Vi starter med å multiplisere funksjonsuttrykket med r. Da får vi:

$$r^2 = 2r\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1^2$$

Legg merke til hvordan vi legger til 1 på begge sider av likhetstegnet for å få et fullstendig kvadrat. Dermed ser vi at likningen framstiller en sirkel med radius 1 og sentrum i $(1,0)$.

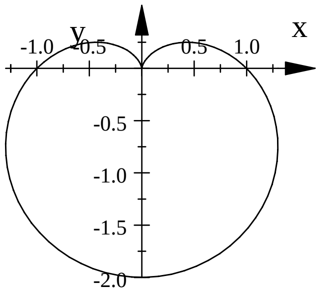
Polarkoordinater er nyttige bl.a. til å framstille kurver som er vanskelig å få til i et kartesisk koordinatsystem. Du finner noen slike eksempler nedenfor.



Funksjonen

$r = a \cdot \theta$ der $a > 0$

framstiller en spiral. Til venstre ser du et eksempel på en slik spiral, der $a = \frac{1}{2}$ og $\theta \in [0, 2\pi]$.

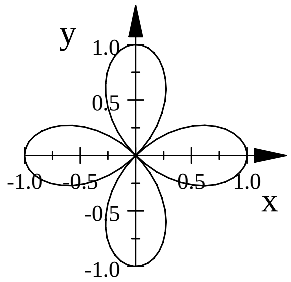


Funksjonen

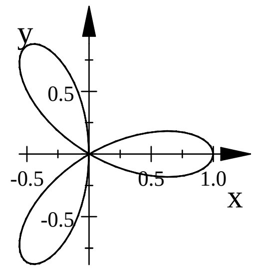
$r = 1 - \sin\theta\,,\ \theta \in [0, 2\pi]$

framstiller en kurve som kalles en *kardioide* ("hjertekurve"). Bruk dataverktøy til å prøve andre varianter ved å variere konstantene *a* og *b* i den polare funksjonen

$r = a - b\sin\theta\,,\ \theta \in [0, 2\pi]$.



$r = \cos(2\theta)$



$r = \cos(3\theta)$

Funksjoner av typen

$r = \sin(n\theta)$

og

$r = \cos(n\theta)$

der $n \in \mathbb{N}$, gir fine figurer med sløyfer. Til venstre ser du to slike eksempler. Prøv selv med andre varianter!

Vi finner skjæringspunkter mellom to polare funksjoner ved å finne de verdiene av θ som gir samme *r*-verdi i begge funksjonene, som vist i eksemplet nedenfor. Men vær oppmerksom på at vi kan få skjæring også i andre punkter, spesielt i origo.

Eksempel 1.2: Finn skjæringspunktene mellom kardioiden

$r = 1 - \sin\theta$

og sirkelen

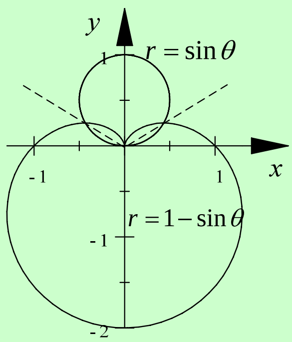
$r = \sin\theta$.

Løsning: Vi setter de to *r*-verdiene lik hverandre:

$$1 - \sin\theta = \sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\theta = \tfrac{1}{6}\pi} \quad \vee \quad \underline{\theta = \tfrac{5}{6}\pi}.$$

Da er

$$r = \sin\theta = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$



I et kartesisk koordinatsystem gir dette skjæringspunktene

$$x = r\cos\theta = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \cdot \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \underline{\tfrac{1}{4}\sqrt{3}} \\ \tfrac{1}{2} \cdot \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \underline{-\tfrac{1}{4}\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$y = r\sin\theta = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \underline{\tfrac{1}{4}}.$$

Dessuten kan begge funksjonene ha $r = 0$, men ikke for samme verdi av θ. Se figuren til venstre.

2. Beregning av ekstremalverdier.

Når vi skal beregne ekstremalverdier i henholdsvis *x*- og *y*-retning, benytter vi at

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

og deriverer disse med hensyn på θ slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 2.1: Finn ekstremalpunktene i henholdsvis *x*- og *y*-retningene for kardioiden

$$r = 1-\sin\theta\,, \qquad \theta\in[0,2\pi]\,.$$

Løsning: Vi finner ekstremalpunkt i *x*-retning slik:

$$x = r\cos\theta = (1-\sin\theta)\cos\theta = \cos\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - \left(\cos\theta\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot(-\sin\theta)\right) = -\sin\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= -\sin\theta - \left(1-\sin^2\theta\right) + \sin^2\theta = \underline{2\sin^2\theta - \sin\theta - 1}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1\pm 3}{4} = \begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Dette gir:

$$\sin\theta = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r = 1-\sin\theta = 1-1 = \underline{0} \\ \underline{\theta = \frac{1}{2}\pi} \end{cases}$$

$$\sin\theta = -\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r = 1-\sin\theta = 1-\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{3}{2}} \\ \underline{\theta = \frac{7}{6}\pi} \quad\vee\quad \underline{\theta = \frac{11}{6}\pi} \end{cases}$$

Vi finner ekstremalpunkt i *y*-retning slik:

$$y = r\sin\theta = (1-\sin\theta)\sin\theta = \sin\theta - \sin^2\theta$$

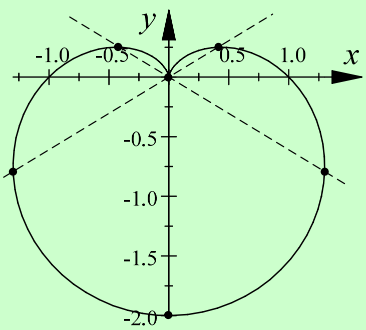
$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 2\sin\theta\cdot\cos\theta = \underline{\cos\theta(1-2\sin\theta)}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ 1-2\sin\theta = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dette gir:

$$\cos\theta = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \underline{\theta = \frac{1}{2}\pi} \quad\Leftrightarrow\quad r = 1-\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1-1 = \underline{0} \\ \underline{\theta = \frac{3}{2}\pi} \quad\Leftrightarrow\quad r = 1-\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1-(-1) = \underline{2} \end{cases}$$

$$\sin\theta = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} r = 1-\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 1-\frac{1}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}} \\ \underline{\theta = \frac{1}{6}\pi} \quad\vee\quad \underline{\theta = \frac{5}{6}\pi} \end{cases}$$

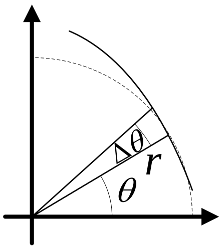


Vi kan nå finne *x*- og *y*-verdier for alle disse punktene, men hopper over det nå. Se heller figuren til venstre. Merk spesielt forholdene når $\theta = \frac{1}{2}\pi$, d.v.s. i origo. Der er både

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \text{ og } \frac{dy}{d\theta} = 0\,.$$

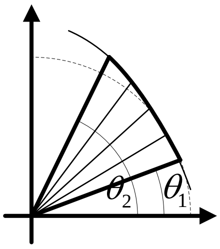
3. Integrasjon.

3.1. Beregning av volum.



Vi går ut fra at $r = f(\theta)$. Dersom θ øker med en liten vinkel $\Delta\theta$, får vi et lite arealelement ΔA som vi kan finne ved å anta at *r* er radien i en sirkel slik figuren til venstre antyder. Da blir

$$\frac{\Delta A}{\pi r^2} \approx \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A \approx \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta = \tfrac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 \cdot \Delta\theta .$$



Vi finner arealet som avgrenses av grafen til $r = f(\theta)$ og de to radiene $r_1 = f(\theta_1)$ og $r_2 = f(\theta_2)$ ved å summere alle slike bidrag:

$$A \approx \sum_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \Delta A \approx \sum_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \tfrac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 \cdot \Delta\theta .$$

Når $\Delta\theta \to 0$, kan vi på vanlig måte erstatte $\approx$ med $=$ samtidig som vi erstatter $\Delta\theta$ med $d\theta$ og integrerer istedenfor å summere. Da får vi:

Arealet er

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f(\theta)\right)^2 d\theta .$$

Eksempel 3.1: Beregn arealet som avgrenses av kardioiden

$$r = 1 - \sin\theta , \qquad \theta \in [0, 2\pi] .$$

Løsning: Arealet blir

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\sin\theta)^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta\right) d\theta .$$

Nå benytter vi at

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\theta = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\theta) .$$

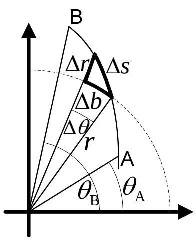
Da blir

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\sin\theta + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\theta)\right)\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{3}{4} - \sin\theta - \tfrac{1}{4}\cos(2\theta)\right) d\theta$$

$$= \left[\tfrac{3}{4}\theta + \cos\theta - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} = \tfrac{3}{4}\cdot 2\pi + \cos(2\pi) - \tfrac{1}{8}\sin(4\pi) - 0 - \cos 0 + \tfrac{1}{8}\sin 0$$

$$= \tfrac{3}{2}\pi + 1 - 0 - 0 - 1 + 0 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}\pi}}$$

3.2. Beregning av buelengde.



Som før antar vi at en funksjon er gitt i polarkoordinater ved

$$r = f(\theta) .$$

På figuren til venstre ser vi et utsnitt av grafen til funksjonen når θ øker med en liten vinkel $\Delta\theta$. Siden vinkelen er gitt i radianer, blir

$$\Delta\theta = \frac{\Delta b}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta b = r\cdot\Delta\theta\,.$$

Videere ser vi at et bue-element Δs er gitt ved

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta b)^2 + (\Delta r)^2} = \sqrt{(r\cdot\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\tfrac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2}\cdot\Delta\theta\,.$$

Så lar vi $\Delta\theta \to 0$. Da blir

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\lim_{\Delta\theta\to 0}\tfrac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2}\cdot d\theta = \sqrt{\left(f(\theta)\right)^2 + \left(\tfrac{df(\theta)}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta\,.$$

Samlet buelengde fra A til B blir da

$$s = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} ds = \int_{\theta_{\mathrm{A}}}^{\theta_{\mathrm{B}}} \sqrt{\left(f(\theta)\right)^2 + \left(f'(\theta)\right)^2}\cdot d\theta\,.$$

Eksempel 3.2: Finn buelengden av kardioiden

$$r = 1-\sin\theta\,, \qquad \theta\in[0,2\pi]\,.$$

Løsning: Vi har

$$r = f(\theta) = 1-\sin\theta \quad \Rightarrow \quad f'(\theta) = -\cos\theta$$

slik at

$$ds = \sqrt{\left(f(\theta)\right)^2 + \left(f'(\theta)\right)^2} = \sqrt{(1-\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2} = \sqrt{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-2\sin\theta+1} = \sqrt{2-2\sin\theta}$$

Da blir buelengden

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\sin\theta}\cdot d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sin\theta}\cdot d\theta\,.$$

Nå innfører vi en ny variabel t ved

$$\theta = t - \tfrac{1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad d\theta = dt\,.$$

Da blir

$$1-\sin\theta = 1-\sin\left(t-\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1-(-\cos t) = 1+\cos t$$

slik at

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sin\theta}\cdot d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{1+\cos t}\cdot dt\,.$$

Nå kommer nøkkel-operasjonen: Vi benytter at

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\cos t} = \pm\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right).$$

Her må vi velge fortegn slik at $\pm\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)$ alltid blir positiv. Dette innebærer at vi velger pluss når $0\le\tfrac{1}{2}t\le\tfrac{1}{2}\pi \quad\Leftrightarrow\quad 0\le t\le\pi$ og minus når $\tfrac{1}{2}\pi<\tfrac{1}{2}t\le\tfrac{3}{2}\pi \quad\Leftrightarrow\quad \pi<t\le 3\pi$. Da blir

$$s = \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{1+\cos t}\cdot dt = \sqrt{2}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)dt + \int_{\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\left(-\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right)dt\right)$$

$$= 2\left(\left[2\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} - \left[2\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right]_{\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\right) = 4\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)$$

$$= 4\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 1\right) = \underline{\underline{8}}$$