1. Parameterframstilling.

Når en partikkel beveger seg i et plan, vil partikkelens posisjon (x, y) variere med tiden *t*. Generelt vil både *x* og *y* avhenge av *t*, slik at vi kan skrive

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

Den banen partikkelen følger, er derfor entydig gitt ved likningene for *x* og *y* når vi vet hvilke verdier for *t* vi skal bruke.

Tilsvarende situasjoner har i mange andre fagområder. Innen økonomi vet vi jo at priser, kostnader, salgsvolum, inntekter og andre slike størrelser varierer med tiden. Innen tekniske fag vet vi at mange størrelser avhenger av temperaturen. Det er derfor naturlig å lage en mer generell definisjon av slike sammenhenger, der to størrelser *x* og *y* begge avhenger av en tredje størrelse *t*. Vi skal legge hovedvekten på den kurven som framkommer når punktet (x, y) tegnes inn i et kartesisk koordinatsystem mens *t* varierer.

De to kontinuerlige funksjonene

$x = f(t)$ og $y = g(t)$ der *t* er element i et intervall *I*

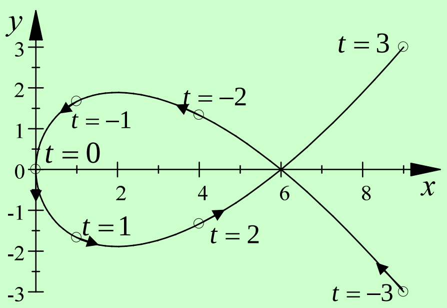
kalles en ***parameterframstilling*** av en kurve *C*.
Størrelsen *t* kalles en ***parameter***.

Eksempel 1.1: Hvilken kurve *C* framstilles av parameterframstillingen

$$x = t^2, \qquad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t, \quad t \in [-3, 3]?$$

Løsning: Vi kan regne ut noen punkter, og bruke dem til å skissere kurven:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	9	4	1	0	1	4	9
y	-3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	3



Eller vi kan bruke dataverktøy til å tegne grafen, slik det er gjort til venstre. Der er også de beregnede punktene tegnet inn. I hvert punkt er det også tegnet inn ei pil som angir i hvilken retning vi går når *t* øker.

I Eksempel 1.1 ser du at kurven danner en lukket sløyfe. Dette skyldes at vi får samme punkt (x, y) for to forskjellige verdier av *t*. Vi kan finne slike punkter der en kurve krysser seg selv ved å finne to *t*-verdier t_1 og t_2 som gir *både* samme *x*-verdi *og* samme *y*-verdi.

Eksempel 1.2: Finn eventuelle punkter (x, y) der kurven i Eksempel 1.1 krysser seg selv.

Løsning: Parameterframstillingen var

$$x = t^2, \qquad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t, \quad t \in [-3,3].$$

Vi skal nå finne to verdier t_1 og t_2 som er slik at

$$x = t_1^{\,2} = t_2^{\,2}$$

og

$$y = \tfrac{1}{3}t_1^{\,3} - 2t_1 = \tfrac{1}{3}t_2^{\,3} - 2t_2.$$

Av x-likningen ser vi direkte at

$$t_2 = \pm t_1.$$

Løsningen $t_2 = t_1$ er uinteressant (for å få krysning må vi ha to *forskjellige* t-verdier). Vi setter derfor $t_2 = -t_1$ inn i y-likningen, og får

$$\tfrac{1}{3}t_1^{\,3} - 2t_1 = \tfrac{1}{3}(-t_1)^3 - 2(-t_1) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3}t_1^{\,3} - 4t_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 0 \;\vee\; \tfrac{2}{3}t_1^{\,2} - 4 = 0.$$

Her er det kun den siste muligheten som er interessant. Da får vi

$$\tfrac{2}{3}t_1^{\,2} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \underline{\pm\sqrt{6}}.$$

Krysningspunktet blir da:

$$x = \left(\pm\sqrt{6}\right)^2 = \underline{\underline{6}}.$$

$$y = \tfrac{1}{3}\left(\pm\sqrt{6}\right)^3 - 2\cdot\left(\pm\sqrt{6}\right) = \pm 2\sqrt{6} \mp 2\sqrt{6} = \underline{\underline{0}}.$$

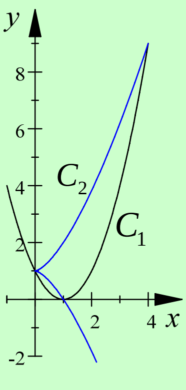
Dette stemmer med grafen.

Vi kan bruke samme teknikk for å finne eventuelle skjæringspunkter mellom to kurver som er gitt ved hver sin parameterframstilling:

Eksempel 1.3: Finn eventuelle skjæringspunkter mellom kurvene C_1 og C_2 som er gitt ved disse parameterframstillingene:

$$C_1: \quad x_1 = t_1 + 1, \qquad y_1 = t_1^{\,2}, \qquad t_1 \in [-2,3].$$

$$C_2: \quad x_2 = t_2^{\,2}, \qquad y_2 = t_2^{\,3} + 1, \qquad t_2 \in [-2,2].$$



Løsning: De to kurvene er tegnet opp til venstre, C_1 med svart strek og C_2 med blå strek. For å finne fellespunktene, setter vi $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$, og får

$$t_1 + 1 = t_2^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2^{\,2} - 1.$$

$$t_1^{\,2} = t_2^{\,3} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(t_2^{\,2} - 1\right)^2 = t_2^{\,3} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_2^{\,4} - 2t_2^{\,2} + 1 = t_2^{\,3} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad t_2^{\,4} - t_2^{\,3} - 2t_2^{\,2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_2^{\,2}\left(t_2^{\,2} - t_2 - 2\right) = 0$$

Her er enten

$$t_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_2 = 0^2 = 0 \\ y = y_2 = 0^3 + 1 = 1 \end{cases}$$

eller

$$t_2^{\,2} - t_2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Dette gir to muligheter:

$$t_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_2 = 2^2 = 4 \\ y = y_2 = 2^3 + 1 = 9 \end{cases}$$

$$t_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_2 = (-1)^2 = 1 \\ y = y_2 = (-1)^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Alt i alt har vi tre fellespunkter: $\underline{\underline{(0,1)}}$, $\underline{\underline{(1,0)}}$ og $\underline{\underline{(4,9)}}$.

Noen vanlige kurver kan uttrykkes enkelt med parameterframstilling, slik neste eksempel viser:

Eksempel 1.4: Vis at parameterframstillingen

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

blir en ellipse med halvakser *a* og *b*.

Løsning: Vi vet at ellipselikningen er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Men av parameterframstillingen har vi

$$x = a\cos t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} = \cos t, \qquad y = b\sin t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{b} = \sin t.$$

Da blir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Videre ser vi at når $t \in [0, 2\pi]$, vil både $\cos t$ og $\sin t$ gjennomløpe en hel periode slik at vi starter og slutter i punktet $(a, 0)$. Vi får derfor ”lukket” ellipsen.

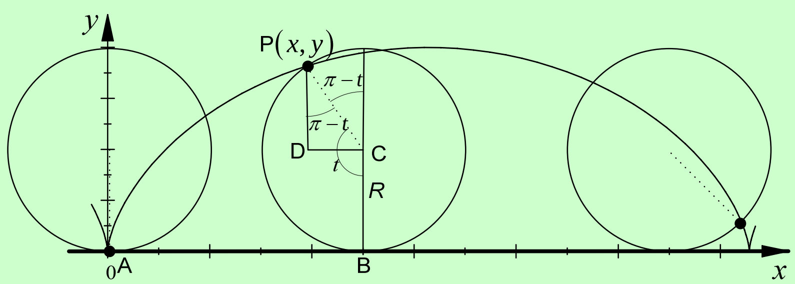
Dersom $a = b = R$, får vi en sirkel med radius *R*. Parameterframstillingen for en sirkel blir derfor

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

En annen kjent kurve er ***sykloiden*** som vi skal se på i neste eksempel.

Eksempel 1.5: En sirkel med radius *R* ruller på et horisontalt underlag. Den banen som et punkt på sirkelen følger kalles en ***sykloide***. Finn en parameterframstilling for sykloiden.

Løsning:



Nøkkelen til løsningen er å innse at strekningen AB er like lang som sirkelbuen BP. Siden vinkelen t er gitt i radianer, blir nå

$$t = \frac{\mathrm{BP}}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{AB} = \mathrm{BP} = R \cdot t\,.$$

Av figuren ser vi nå at:

$$x = \mathrm{AB} - \mathrm{DC} = R \cdot t - R\sin(\pi - t) = R \cdot t - R\sin t = \underline{\underline{R(t - \sin t)}}.$$

$$y = \mathrm{BC} + \mathrm{DP} = R + R\cos(\pi - t) = R - R\cos t = \underline{\underline{R(1 - \cos t)}}.$$

Vi kan (i alle fall i prinsippet) gå over fra parameterframstilling til vanlig funksjonssammenheng mellom x og y ved å eliminere t fra parameter-likningene. Vær obs på at vi da kan få grafen til to eller flere funksjoner, slik neste eksempel viser.

Eksempel 1.6: Erstatt parameterframstillingen i Eksempel 1.1 med en eller flere funksjoner mellom x og y.

Løsning: Parameterframstillingen var

$$x = t^2\,, \qquad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t\,, \quad t \in [-3,3].$$

Vi eliminerer t:

$$x = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt{x}\,.$$

Da får vi to funksjoner:

$$t = +\sqrt{x}: \quad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - 2\sqrt{x} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}} = \underline{\underline{\sqrt{x}\left(\tfrac{1}{3}x - 2\right)}},\ x \in [0,9].$$

$$t = -\sqrt{x}: \quad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t = \tfrac{1}{3}\left(-\sqrt{x}\right)^3 - 2\left(-\sqrt{x}\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}} = \underline{\underline{-\sqrt{x}\left(\tfrac{1}{3}x - 2\right)}},\ x \in [0,9].$$

2. Derivasjon.

I en parameterframstilling er det egentlig t som er den fri variable, mens x og y er funksjoner av t. Det er derfor naturlig å derivere både x og y med hensyn på t. Men det er også nyttig å beholde $y' = \frac{dy}{dx}$, bl.a. fordi vi er vant med å bruke denne størrelsen til å se hvordan grafen stiger eller synker. Vi innfører derfor en prikk-notasjon for å markere derivasjon med hensyn på t, og definerer:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Vi har disse sammenhengene:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad y'' = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3}.$$

Den første av disse sammenhengene vises relativt enkelt med et litt uformelt resonnement:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \dot{y}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \underline{\underline{\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}}.$$

Den andre vises etter samme prinsipp, selv om regningene er litt mer komplisert:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\dot{y}\cdot\ddot{x}}{(\dot{x})^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \underline{\underline{\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\dot{y}\cdot\ddot{x}}{(\dot{x})^3}}}.$$

Vi kan finne lokale ekstremalverdier i henholdsvis *x*- og *y*-retning ved å sette $\dot{x}=0$ og $\dot{y}=0$. Hvis vi i tillegg holder styr på fortegnene til $\dot{x}$ og $\dot{y}$, kan vi avgjøre om disse ekstremalverdiene er maksimal- eller minimalverdier. Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 2.1:

a) Bestem lokale ekstremalverdier i henholdsvis *x*-retning og *y*-retning for kurven i Eksempel 1.1.

b) Finn de punktene på kurven i Eksempel 1.1 der tangentens stigningstall er lik $\frac{1}{2}$.

Løsning: Kurven var gitt ved parameterframstillingen

$$x = t^2, \qquad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t, \quad t\in[-3,3].$$

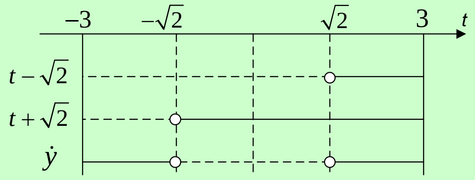
Dette gir

$$\dot{x} = 2t, \qquad \dot{y} = t^2-2, \qquad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t^2-2}{2t}.$$

a) Ekstremalpunkt i *x*-retning når $\dot{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\underline{0}$.
Vi ser at når $t<0$, er $\dot{x}$ negativ slik at *x* da avtar. Når $t>0$ blir $\dot{x}$ positiv slik at *x* da vil øke. Altså har vi et minimumspunkt for *x* når $t=0$. Da er $x=0^2=0$ og $y=\frac{1}{3}\cdot 0^3-2\cdot 0=0$ slik at origo er et lokalt minimumspunkt i *x*-retningen.

Ekstremalpunkt i *y*-retningen når $\dot{y}=0 \quad\Leftrightarrow\quad t^2-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\underline{\pm\sqrt{2}}$.
For oversiktens skyld setter vi opp fortegnslinje for

$$\dot{y} = t^2-2 = \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right):$$



Av fortegnsskjemaet ser vi at *y* vokser så lenge $t<-\sqrt{2}$ og avtar når $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$. Dette betyr at *y* må ha et lokalt maksimum når $t=-\sqrt{2}$. Da er

$$x = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = \underline{\underline{2}},$$

$$y = \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3 - 2\cdot\left(-\sqrt{2}\right) = -\tfrac{2}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2} = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}\sqrt{2}}}.$$

Videre ser vi at *y* avtar når $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ og vokser igjen når $t>\sqrt{2}$. Dette betyr at *y* må ha et lokalt minimum når $t=\sqrt{2}$. Da er

$$x = \sqrt{2}^2 = \underline{\underline{2}}, \quad y = \tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2}^3 - 2\cdot\sqrt{2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}-2\sqrt{2} = \underline{\underline{-\tfrac{4}{3}\sqrt{2}}}.$$

b) Tangentens stigningstall er lik $\frac{1}{2}$ når

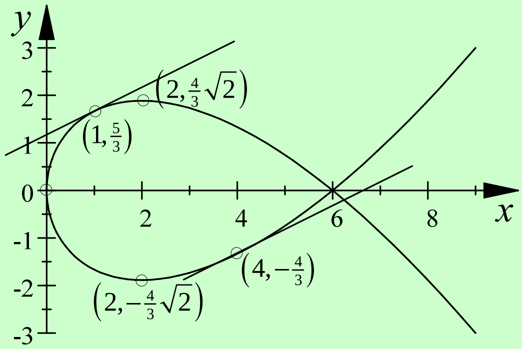
$$y' = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2-2}{2t} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2 = \tfrac{1}{2}\cdot 2t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Når $t = 2$, er $x = 2^2 = \underline{\underline{4}}$, $y = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2\cdot 2 = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$.

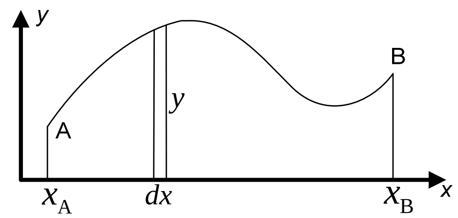
Når $t = -1$, er $x = (-1)^2 = \underline{\underline{1}}$, $y = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1) = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$.

Figuren nedenfor viser kurven med ekstremalpunkter og tangenter inntegnet.



3. Integrasjon.

3.1. Areal under en kurve.



Du husker sikkert at vi finner arealet som avgrenses av en graf, x-aksen, og to rette linjer $x = x_A$ og $x = x_B$, beregner vi integralet

$$\int_{x_A}^{x_B} y\,dx\,.$$

Her forutsetter vi at $y \ge 0$ i hele intervallet. Når vi skal finne arealet som avgrenses av en kurve gitt på parameterform, benytter vi at

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \dot{x}\,dt$$

slik at integralet blir

$$\int_{t_A}^{t_B} y\cdot\dot{x}\,dt\,.$$

Her er det viktig å holde rede på hvilken retning vi går i når t øker. Dersom vi går fra A til B, har vi ingen problemer. Men dersom vi går fra B til A, blir $\dot{x}$ negativ. For å få rett fortegn, må vi sørge for at også dt blir negativ. Det oppnår vi ved å integrere fra A som har den høyeste t-verdien og til B som har den laveste t-verdien. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 3.1: Bestem arealet som avgrenses av *x*-aksen og kurven gitt ved parameter-framstillingen:

a) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ (sykloiden, se eksempel 1.5).

b) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, \pi]$ (halv ellipse, se eksempel 1.4).

Løsning:

a) $x = t - \sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 1 - \cos t \geq 0$.

Videre ser vi at:

$y = 1 - \cos t \geq 0$ for alle $t \in [0, 2\pi]$.

$y = 0$ når $1 - \cos t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = 2\pi$.

Da blir arealet

$$A = \int_{t=0}^{t=2\pi} y \cdot \dot{x} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt .$$

Nå benytter vi at

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 t = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2t) .$$

Da blir

$$A = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2t)\right)\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos t + \tfrac{1}{2}\cos(2t)\right) dt$$

$$= \left[\tfrac{3}{2}t - 2\sin t + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin(2\pi) + \tfrac{1}{4}\sin(4\pi)\right) - 0 = \underline{\underline{3\pi}}$$

b) $x = a\cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -a\sin t \leq 0$ når $t \in [0, \pi]$.

Videre ser vi at

$y = b\sin t \geq 0$ for alle $t \in [0, \pi]$.

$y = 0$ når $\sin t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = \pi$.

Siden $\dot{x} \leq 0$, blir arealet

$$A = \int_{t=\pi}^{t=0} y \cdot \dot{x} dt = \int_\pi^0 b\sin t \cdot (-a\sin t) dt = -ab\int_\pi^0 \sin^2 t dt .$$

Nå benytter vi at

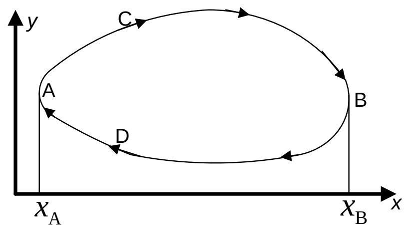
$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 t = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t) .$$

Da blir

$$A = -ab\int_\pi^0 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2t)\right) dt = -ab\left[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_\pi^0$$

$$= -ab\left(\left(\tfrac{1}{2} \cdot 0 - \tfrac{1}{4} \cdot \sin 0\right) - \tfrac{1}{2} \cdot \pi - \tfrac{1}{4}\sin(2\pi)\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\pi ab}}$$

3.2. Areal av en lukket sløyfe.



Det er vanlig at en kurve som er gitt ved en parameter-framstilling, danner en lukket sløyfe slik som på figuren til venstre. Arealet av sløyfa blir da arealet under kurven ACB, minus arealet under kurven ADB. Med den rotasjonsretningen som er angitt på figuren ("med urviseren"), blir dette

$$A = \int_{t_{A1}}^{t_B} y \cdot \dot{x} dt - \int_{t_{A2}}^{t_B} y \cdot \dot{x} dt = \int_{t_{A1}}^{t_B} y \cdot \dot{x} dt + \int_{t_B}^{t_{A2}} y \cdot \dot{x} dt = \int_{t_{A1}}^{t_{A2}} y \cdot \dot{x} dt$$

Her er t_{A1} og t_{A2} henholdsvis første og andre *t*-verdi som gir punktet A.

Du kan selv begrunne at:

- Resultatet blir det samme uansett hvor på den lukkede sløyfa vi har start- og sluttpunktet A.
- Det spiller ingen rolle om hele eller deler av den lukkede sløyfa ligger under *x*-aksen.
- Dersom rotasjonsretningen er ”mot urviseren”, må vi skifte fortegn på integralet.

Eksemplet nedenfor illustrerer teknikken.

Eksempel 3.2: Beregn arealet av den lukkede sløyfa i Eksempel 1.1.

Løsning: Parameterframstilingen for kurven var

$$x = t^2, \qquad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t, \quad t \in [-3, 3].$$

I Eksempel 1.2 fant vi at kurven krysser seg selv når $t = -\sqrt{6}$ og når $t = \sqrt{6}$. Vi ser også (bl.a. av figuren i Eksempel 1.1) at vi har rotasjon ”mot urviseren”. Da blir arealet

$$A = -\int_{t=-\sqrt{6}}^{t=\sqrt{6}} y \cdot \dot{x}dt = -\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\tfrac{1}{3}t^3 - 2t\right) \cdot 2tdt = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(-\tfrac{2}{3}t^4 + 4t^2\right) dt$$

$$= \left[-\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{5}t^5 + 4 \cdot \tfrac{1}{3}t^3\right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = -\tfrac{2}{15}\sqrt{6}^5 + \tfrac{4}{3}\sqrt{6}^3 + \tfrac{2}{15}\left(-\sqrt{6}\right)^5 - \tfrac{4}{3}\left(-\sqrt{6}\right)^3$$

$$= -\tfrac{72}{15}\sqrt{6} + \tfrac{24}{3}\sqrt{6} - \tfrac{72}{15}\sqrt{6} + \tfrac{24}{3}\sqrt{6} = \underline{\underline{\tfrac{32}{5}\sqrt{6}}}$$

3.3. Lengden av et kurvestykke.

La *ds* være lengden av et svært lite stykke langs en kurve. Da er

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (\dot{x}dt)^2 + (\dot{y}dt)^2 = \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right)(dt)^2.$$

Dette gir

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt.$$

Lengden av et kurvestykke blir da

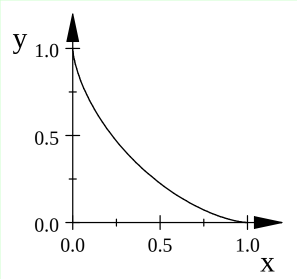
$$s = \int_{t=t_1}^{t=t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt$$

der t_1 og t_2 er *t*-verdiene til de to endepunktene av kurvestykket.

Eksempel 3.3: Beregn lengden av den kurven som er gitt ved parameterframstillingen

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad t \in \left[0, \tfrac{1}{2}\pi\right].$$

Løsning: Kurven er tegnet opp nedenfor til venstre.



$$x = \cos^3 t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$$

$$y = \sin^3 t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 3\sin^2 t \cdot \cos t$$

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = \left(-3\cos^2 t \cdot \sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t \cdot \cos t\right)^2$$

$$= 9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\sin^4 t \cdot \cos^2 t$$

$$= 9\cos^2 t \cdot \sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = \underline{9\cos^2 t \cdot \sin^2 t}$$

Da blir

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = 3\cos t \cdot \sin t\ dt = \tfrac{3}{2} \cdot (2\sin t \cdot \cos t)\ dt = \tfrac{3}{2}\sin(2t)\ dt$$

slik at

$$s = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} ds = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{3}{2}\sin(2t)\,dt = \tfrac{3}{2}\cdot\left[-\tfrac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= -\tfrac{3}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\tfrac{3}{4}(-1-1) = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$$

3.4. Andre integrasjonsproblem.

På grunnlag av det vi nå har vært gjennom, vil du være i stand til å beregne massesenter og treghetsmoment for noen legemer, og volum og overflateareal av rotasjonslegemer. Du må da kombinere de generelle formlene for slike beregninger med de spesielle formlene vi har for parameterframstillinger:

$$dx = \dot{x}dt\,, \qquad dy = \dot{y}dt\,, \qquad ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt\,.$$

Eksempel 3.4: Beregn arealet av den rotasjonsflata som framkommer når kurven i Eksempel 3.3 roterer en gang rundt x-aksen.

Løsning: Vi vet fra før at arealet av rotasjonsflater ved rotasjon om x-aksen er

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\cdot ds\,.$$

I vårt eksempel blir

$$A = \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} 2\pi y\cdot ds = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 t\cdot 3\cos t\sin t dt = 6\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4 t\cdot\cos t dt\,.$$

Vi bruker nå substitusjonen

$$u = \sin t \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dt} = \cos t \quad\Leftrightarrow\quad du = \cos t dt$$

og at $\sin 0 = 0$ og $\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1$. Da blir

$$A = 6\pi\int_0^1 u^4 du = 6\pi\cdot\left[\tfrac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{6}{5}\pi}}\,.$$

Eksempel 3.5: Kurven i Eksempel 1.1 danner en lukket sløyfe. Vi får et rotasjonslegeme når denne sløyfa roterer en gang om x-aksen. Finn volum og massesenter for dette rotasjons-legemet.

Løsning: I tidligere eksempler har vi kommet fram til at kurvestykket over x-aksen dannes når t går fra $t = -\sqrt{6}$ til $t = 0$. Da går vi i negativ x-retning. Siden vi har at

$$x = t^2 \quad\Rightarrow\quad \dot{x} = 2t\,, \qquad y = \tfrac{1}{3}t^3 - 2t$$

blir volumet av rotasjonslegemet

$$V = \int_{t=0}^{t=-\sqrt{6}} \pi y^2 dx = \pi\int_0^{-\sqrt{6}}\left(\tfrac{1}{3}t^3 - 2t\right)^2\cdot(2t)\,dt = \underline{\underline{12\pi}}$$

der integrasjonen er utført med dataverktøy for å slippe plundrete integrasjoner for hand. Massesenterets x-koordinat blir

$$X_C = \frac{1}{V}\int_{t=0}^{t=-\sqrt{6}} x\cdot\pi y^2 dx = \frac{\pi}{12\pi}\int_0^{-\sqrt{6}} t^2\left(\tfrac{1}{3}t^3 - 2t\right)^2\cdot(2t)\,dt = \frac{1}{12}\cdot\tfrac{144}{5} = \underline{\underline{\tfrac{12}{5}}}\,.$$