Kontinuitet.

1. Definisjoner.

En enkel og lett forståelig definisjon av begrepet ***kontinuitet*** kan være omtrent slik: En funksjon er kontinuerlig i et intervall dersom du kan tegne funksjonsgrafen uten å løfte blyanten fra papiret. Ulempen med en slik definisjon er at den er temmelig ubrukelig til formelle analyser.

Det fins flere formelle definisjoner av kontinuitetsbegrepet. Heldigvis viser det seg at alle er ekvivalente. En enkel definisjon som også er grei å bruke støtter seg på grenseverdibegrepet, og ser slik ut:

En funksjon *f* er kontinuerlig i et ***punkt*** $x = a$ hvis og bare hvis disse betingelsene er oppfylt:

1. $f(a)$ eksisterer.
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Funksjonen er kontinuerlig i et ***intervall*** hvis og bare hvis den er kontinuerlig i alle punktene i intervallet.

Vi kan også definere kontinuitet i et punkt etter samme mønster som grenseverdien i et punkt:

Gitt en funksjon f med definisjonsmengde D_f. La $a \in D_f$.
f er kontinuerlig for $x = a$ hvis og bare hvis det for ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ fins et tall $\delta > 0$ slik at

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Dersom *f* *ikke* er kontinuerlig, sier vi at *f* er ***diskontinuerlig***.

På grunnlag av disse definisjonene kan vi vise:

Dersom to funksjoner *f* og *g* begge er kontinuerlige i et intervall *I*, så er også disse sammensatte funksjonene kontinuerlige i *I*:

$a \cdot f + b \cdot g$ der *a* og *b* er konstanter.

$f \cdot g$.

$\dfrac{f}{g}$ i alle punkter x_0 der $g(x_0) \neq 0$.

Vi kan undersøke kontinuitetsegenskapene til våre vanlige funksjoner en gang for alle. Da vil vi oppdage at:

Følgende funksjoner er kontinuerlige i hele sitt definisjonsområde:

- Alle polynomfunksjoner
  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.
- Kvadratrotfunksjonen
  $f(x) = \sqrt{x}$ når $x \geq 0$.
- Alle eksponentialfunksjoner
  $f(x) = a^x$.
- Alle logaritmefunksjoner
  $f(x) = \log_a(x)$ når $x > 0$.
- Alle sinus- og cosinusfunksjoner.
- $f(x) = \tan(x)$ når $x \neq \frac{\pi}{2} \pm n \cdot \pi$.
- Alle hyperbolske funksjoner.

Væpnet med disse kunnskapene er det som regel ganske lett å undersøke kontinuitet, som ekseplene nedenfor viser.

***Eksempel 1*:** Undersøk om disse funksjonene er kontinuerlig i $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{når} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{når} \quad x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2}{(x+1)^2} & \text{når} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{når} \quad x = -1 \end{cases}$

Løsning:

a) Både teller og nevner er polynomfunksjoner, og følgelig kontinuerlige.
Da er også brøken kontinuerlig unntatt muligens når $x = 1$.
Men vi ser at

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1}(x+1) = \underline{2}.$$

Siden

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = f(1) = 2,$$

er funksjonen kontinuerlig også for $x = 1$.

Da er funksjonen kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Både teller og nevner er polynomfunksjoner, og følgelig kontinuerlige.
Da er også brøken kontinuerlig unntatt muligens når $x = -1$.
Ved direkte innsetting ser vi at teller går mot $(-1)^2 - 2 = -1$ mens nevner går mot 0 når $x \to -1$. Altså eksisterer ikke $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2}{(x+1)^2}$.
Da er funksjonen kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, og diskontinuerlig for $x = -1$.

Oppgave 1.

For mer kompliserte funksjoner er følgende setning nyttig:

Dersom en funksjon *f* er kontinuerlig for $x = a$, og en funksjon *g* er kontinuerlig for $x = f(a)$, er den sammensatte funksjonen $g(f(x))$ kontinuerlig når $x = a$.

Denne setningen må vi illustrere med et eksempel.

Eksempel 2: Undersøk om funksjonen
$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$
er kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning: Vi vet at $x^2 + 1$ er en polynomfunksjon som er kontinuerlig for alle verdier av *x*. Videre ser vi at $x^2 + 1$ er positiv for alle verdier av *x* slik at $\ln(x^2 + 1)$ eksisterer. Dessuten vet vi at $\ln x$ er kontinuerlig for alle *x*. Dermed kan vi slå fast at $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ er kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

Noen ganger må vi se om det er mulig å få en funksjon gitt på intervallform til å bli kontinuerlig:

Eksempel 3: En funksjon *f* er gitt ved
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når} \quad x < 1 \\ a - x & \text{når} \quad x \geq 1 \end{cases}$$
Bestem (om mulig) tallet *a* slik at *f* blir kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning: Vi må bestemme *a* slik at
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 1^-} x^2 = \lim_{x \to 1^+} (a - x) \quad \Leftrightarrow \quad 1^2 = a - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = 2}}.$$

Oppgave 2.

2. Egenskaper ved kontinuerlige funksjoner.

Det er flere grunner til at vi stresser med grenseverdier og kontinuitet. Den kanskje viktigste grunnen er at disse begrepene er helt fundamentale når vi om litt skal gå løs på derivasjon. Men vi kan allerede nå dra nytte av at en funksjon er kontinuerlig i et ***lukket*** intervall. Hva er så et *lukket* intervall? Det er kort og godt et intervall av typen $[a, b]$, d.v.s. at endepunktene av intervallet inngår i intervallet. Vi kan nå vise at:

Dersom en funksjon *f* er kontinuerlig i et ***lukket*** intervall, har vi at:

1. Det eksisterer en ***øvre skranke M*** og en ***nedre skranke m*** slik at $m < f(x) < M$ for alle $x \in [a, b]$.

2. Det fins alltid et *minimumspunkt* $x_1 \in [a, b]$ og et *maksimumspunkt* $x_2 \in [a, b]$ slik at $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ for alle $x \in [a, b]$. De tilhørende funksjonsverdiene $f(x_1)$ og $f(x_2)$ er funksjonens *minimums*- og *maksimumsverdier*.

3. Dersom *d* er et tall som ligger mellom $f(a)$ og $f(b)$, fins minst en $c \in \langle a, b \rangle$ slik at $f(c) = d$.

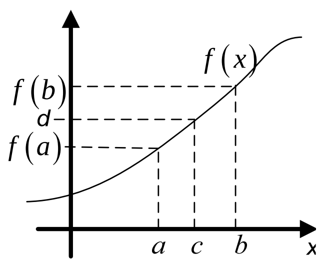
4. Dersom $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn, fins minst en $c \in \langle a, b \rangle$ slik at $f(c) = 0$.

Noen kommentarer til disse setningene:

1: Vi kan være sikre på at funksjonen må være *begrenset*, slik at funksjonsverdiene aldri kan bli mindre enn den nedre skranken og aldri større enn den øvre skranken.

2: Funksjonen *må* ha minst ett veldefinert minimumspunkt og minst ett veldefinert maksimumspunkt. Merk at funksjonen kan ha flere minimumspunkter som har samme funksjonsverdi, og / eller flere maksimumspunkter med samme funksjonsverdi.

3: Dersom du skal løse en likning av typen $f(x) = d$, og ikke klarer å løse den eksakt, kan du finne en tilnærmet løsning dersom du finner to nærliggende verdier *a* og *b* slik at $f(a)$ er *litt* mindre enn *d*, mens $f(b)$ er *litt* større enn *d*. Da kan du velge en verdi $x = c$ som ligger mellom *a* og *b*, finne $f(c)$, og gjenta prosedyren inntil du finner en *x*-verdi slik at $f(x) \approx d$. Se for øvrig eksemplet etter neste punkt.



4: Et spesialtilfelle av situasjonen over med $d = 0$.

Eksemplet nedenfor illustrerer hvordan du kan gå fram for å finne tilnærmet løsning av likninger:

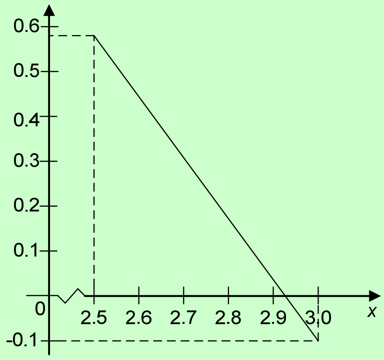
Eksempel 4: Vis at funksjonen

$$f(x) = 4 - x - \ln x$$

har minst ett nullpunkt i intervallet $[2.5, 3]$, og bruk dette til å finne en tilnærmet løsning av likningen

$$4 - x - \ln x = 0.$$

Løsning: Vi merker oss først at *f* er kontinuerlig i intervallet $[2.5, 3]$. Ved innsetting får vi



$$f(2.5) = 4 - 2.5 - \ln(2.5) \approx 0.584$$

mens

$$f(3) = 4 - 3 - \ln 3 \approx -0.099.$$

Da må *f* ha et nullpunkt i intervallet $[2.5, 3]$.

Vi antar at funksjonsgrafen er tilnærmet rettlinjet i intervallet $[2.5, 3]$. Da får vi grafen til venstre. Den indikerer at vi har en bedre løsning nær $x = 2.9$. Vi prøver:

$$f(2.9) = 4 - 2.9 - \ln(2.9) \approx 0.035.$$

Vi kan nå tegne en ny skisse for intervallet $[2.9, 3]$, og den antyder en løsning nær $x = 2.93$. Vi prøver denne løsningen:

$$f(2.93) = 4 - 2.93 - \ln(2.93) \approx -0.005.$$

Vi sier oss fornøyd med denne nøyaktigheten, og sier at likningen

$$4 - x - \ln x = 0$$

har en tilnærmet løsning $x \approx \underline{\underline{2.93}}$.

Oppgave 3.

I forbindelse med derivasjon skal vi se på ***Newtons metode*** for numerisk løsing av slike likninger. Dette er en metode som raskt gir svært nøyaktige løsninger.