Funksjoner på intervallform.

Hittil har vi kun sett på funksjoner som er gitt ved *en* funksjonsforskrift: $y = f(x)$. Men vi kommer ofte bort i funksjoner som er gitt ved ett funksjonsuttrykk i ett intervall, et annet funksjonsuttrykk i et annet intervall osv. Vi sier at slike funksjoner er gitt på *intervallform*, eller at vi har en *delt funksjonsforskrift*.

Mer formelt er funksjonen gitt slik:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ når } x \in I_1 \\ f_2(x) \text{ når } x \in I_2 \\ \quad\vdots \\ f_n(x) \text{ når } x \in I_n \end{cases}$$

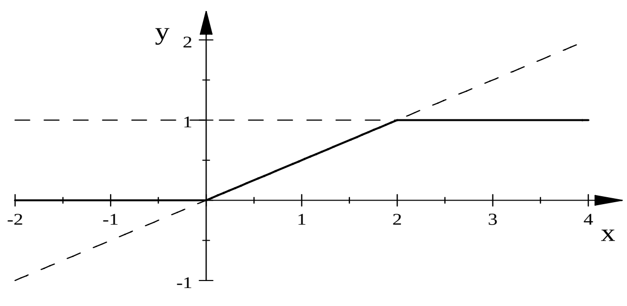
Her er $I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n$ disjunkte mengder slik at $D_f = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$.

Virket dette kryptisk? Her kommer et eksempel:

Eksempel 1: Tegn grafen til en funksjon *f* som er gitt slik:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{når} \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{når} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Løsning: Grafen blir som angitt nedenfor:



Funksjonsgrafen er tegnet med hel strek, mens grafene til $y = \frac{1}{2}x$ og $y = 1$ er stiplet. Legg merke til hvordan hvert funksjonsuttrykk kun gjelder i det angitte intervallet. Legg også merke til at det er angitt en og kun en funksjonsverdi for hver verdi av *x*.

Oppgave 1.

Slike intervallfunksjoner forekommer faktisk ganske ofte i praksis, slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 2: For inneværende år (2009) er satsene for arveavgift slik når et barn arver en av foreldrene:

Av de første 470 000 kr: 0% avgift.
Av de neste 330 000 kr: 6% avgift.
Av det overskytende: 10% avgift.

La *x* være arvens størrelse og *y* arveavgiften. Sett opp *y* som funksjon av *x*.

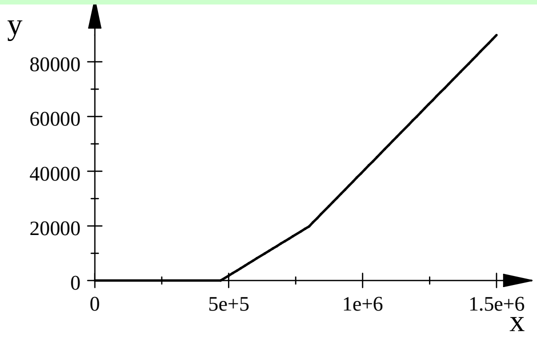
Løsning: Vi lar definisjonsmengden være $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

- Dersom $0 \le x < 470000$, er $y = 0$.
- Dersom $470000 \le x < 800000$, er det 6% avgift av det som overstiger 470 000. Da er
  $y = (x - 470000) \cdot 0.06 = \underline{0.06x - 28200}$.
- Dersom $x \ge 800000$, må det betales 6% avgift av 330 000 kroner (d.v.s. $330000 \cdot 0.06 = 19800$), og deretter 10% avgift av det som overstiger 800 000. Da blir
  $y = 19800 + (x - 800000) \cdot 0.10 = 19800 + 0.10x - 80000 = \underline{0.10x - 60200}$.

Vi summerer opp:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 \le x < 470000 \\ 0.06x - 28200 & \text{når} \quad 470000 \le x < 800000 \\ 0.10x - 60200 & \text{når} \quad x \ge 800000 \end{cases}$$

For oversiktens skyld tegner jeg opp grafen til *y* til høyre.



En helt spesiell intervallfunksjon er ***absoluttverdifunksjonen***. Absoluttverdifunksjonen til *x* skrives $|x|$, og er definert slik:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{når} \quad x < 0 \\ x & \text{når} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Denne definisjonen fører til at absoluttverdien aldri kan bli negativ fordi $-x$ blir positiv når $x < 0$.

Eksempel 3: Skriv absoluttverdifunksjonen nedenfor på intervallform, og tegn grafen:
$y = f(x) = |x - 1|$, $D_f = \mathbb{R}$.

Løsning: Vi må ta for oss to intervaller:

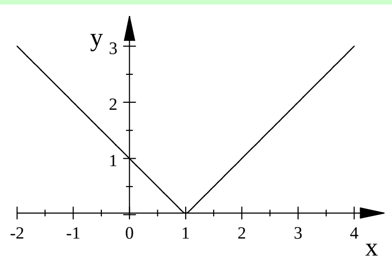
Når $x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$, er $y = -(x-1) = -x + 1$.

Når $x - 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 1$, er $y = x - 1$.

Dermed har vi at

$$y = f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{når} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{når} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Grafen er tegnet til høyre.



Oppgave 2.