1. Noen definisjoner.

1.1. Funksjonsbegrepet.

Vi starter med å definere hva vi mener med en *funksjon:*

En ***funksjon*** *f* fra en mengde *A* til en mengde *B* er en forskrift som til hvert element i *A* tilordner ett og kun ett element i *B*.

Legg merke til at vi ikke sier noe om hva slags elementer det er tale om. Vi kommer stort sett til å la elementene være reelle tall. Men i prinsippet kan elementene være nærmest hva som helst.

Dersom $x \in A$ og $y \in B$, skriver vi ofte $y = f(x)$. Vi sier at *x* er den ***fri variable*** mens *y* er den ***avhengige variable***. Skal vi være pirkete, er *f* navnet på funksjonen, mens $f(x)$ er den *verdien* vi får når vi setter inn *x* i funksjonsuttrykket. Det er imidlertid blitt innarbeidet praksis at vi bruker skrivemåten $f(x)$ både for funksjons*navnet* og funksjons*verdien*.

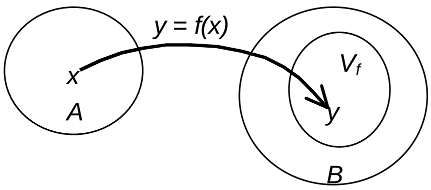
Legg også merke til at definisjonen krever at til enhver verdi *x* i definisjonsmengden skal det finnes ett *og kun ett* element *y*. Den matematiske sammenhengen $y = \pm\sqrt{x}$ er således *ikke* en funksjon fordi det fins to *y*-verdier for hver *x*-verdi (unntatt for $x = 0$). Derimot er $y = x^2$ en funksjon fordi det til hvert reelt tall *x* fins en og kun en verdi *y*.

Mengden *A* kalles ofte ***definisjonsmengden*** til funksjonen *f*, og vi bruker gjerne symbolet D_f for den. Dersom vi ikke sier noe annet, er det underforstått at D_f er den største mulige delmengden av $\mathbb{R}$ (mengden av reelle tall).

Mengden

$$V_f = \{ y \in B \mid y = f(x) \wedge x \in D_f \}$$

kalles ***verdimengden*** til funksjonen *f*. Også den er vanligvis en passe delmengde av $\mathbb{R}$. Disse begrepene er illustrert til høyre.



Eksempel 1.1: Vi har gitt funksjonen

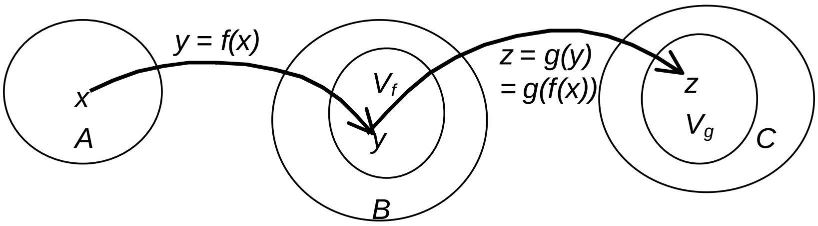
$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Hva er størst mulig definisjonsmengde for *f*? Hva er verdimengden til *f*?

Løsning: Dersom verdimengden skal være en delmengde av $\mathbb{R}$, kan vi ikke ha negativt tall under rottegnet. Vi må altså kreve at $x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$. Størst mulig definisjonsmengde blir derfor $D_f = \underline{\underline{[-1, \rightarrow\rangle}}$. Vi ser at $f(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$. For alle andre *x*-verdier i D_f får vi større funksjonsverdier. Altså er $V_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}$.

Oppgave 1.1.

Vi kan lage *sammensatte funksjoner* ved å la verdimengden for en funksjon være delmengde av definisjonsmengde for en annen funksjon. Situasjonen er illustrert nedenfor:



Du må være klar over at $f\left(g\left(x\right)\right)$ som regel er forskjellig fra $g\left(f\left(x\right)\right)$. Eksemplet nedenfor illustrerer dette.

***Eksempel 1.2*: Gitt funksjonene**

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}\,,\qquad g\left(x\right)=x^2+1\,.$$

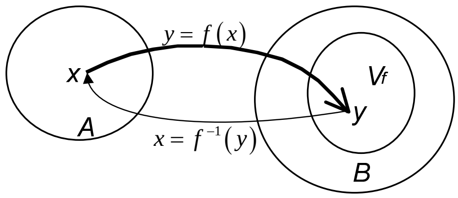
Hva blir $f\left(g\left(x\right)\right)$ og $g\left(f\left(x\right)\right)$?

Løsning:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\sqrt{g\left(x\right)}=\underline{\underline{\sqrt{x^2+1}}}\,.$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+1=\left(\sqrt{x}\right)^2+1=\underline{\underline{x+1}}\,.$$

Generelt kan en funksjon *f* være slik at to eller flere forskjellige *x*-verdier leder til samme *y*-verdi. Men noen ganger er det kun *en* *x*-verdi som fører til hver *y*-verdi. Slike funksjoner kalles ***en-entydige***. Det er da mulig å gå tilbake fra enhver *y*-verdi i *B* til en og kun en *x*-verdi i *A*.



Dersom funksjonen *f* er slik at $y=f\left(x\right)$, sier vi at den funksjonen som entydig bringer oss tilbake fra *y* til *x* er den ***inverse funksjonen av f***. Denne inverse funksjonen skriver vi $x=f^{-1}\left(y\right)$. Situasjonen er illustrert ovenfor til høyre.

Eksempel 1.3: En funksjon *f* er gitt ved

$$y=f\left(x\right)=2x-1\,.$$

Finn den inverse funksjonen til *f*.

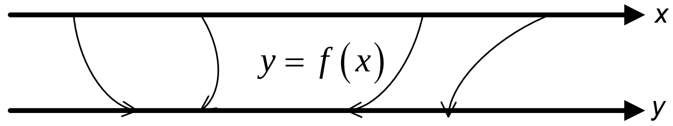
Løsning: Når $y=2x-1$, blir $2x=y+1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}$. Den inverse funksjonen er derfor

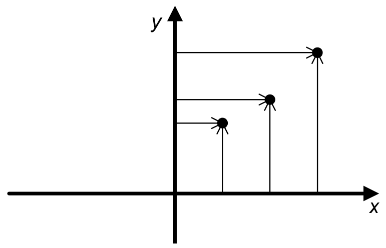
$$x=f^{-1}\left(y\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}}}\,.$$

Vi skal se mer på inverse funksjoner når vi har vært innom *grafer*.

1.2. Grafer.

Vi skal nå se å funksjoner av typen $y = f(x)$ der både *x* og *y* er reelle tall som kan avbildes på hver sin tall-linje. Da kan funksjonen *f* illustreres slik:





Det er imidlertid mye smartere å la de to tall-linjene stå vinkelrett på hverandre slik figuren til venstre viser. Da får vi et ***kartesisk koordinat-system***. Sammenhengen mellom *x* og *y* kan da illustreres som punkter i dette koordinatsystemet.

Dersom $x \in \mathbb{R}$ eller en delmengde av $\mathbb{R}$, vil punktene danne en sammenhengende linje i koordinatsystemet. I dagligtalen kalles denne linja ofte for ***grafen til f***. Strengt tatt er ikke dette helt korrekt, fordi:

> Gitt en funksjon $y = f(x)$. ***Grafen til*** *f* er mengden av tallsett
>
> $$G_f = \{(x,y) \mid x \in D_f \quad \wedge \quad y = f(x)\}.$$

Men så lenge vi begrenser oss til funksjoner av en variabel, er det helt i orden at du bruker den velkjente terminologien der linja i koordinatsystemet omtales som *graf*.

1.3. Monotoni og inverse funksjoner.

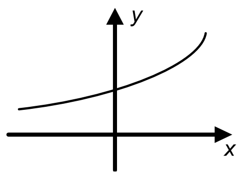
Dersom funksjonen *f* er slik at når *x* øker i verdi vil også $y = f(x)$ øke i verdi, sier vi at *f* er ***strengt monotont voksende*** eller bare ***strengt voksende***. Og dersom *f* er slik at når *x* øker i verdi vil $y = f(x)$ *minke* i verdi, sier vi at *f* er ***strengt monotont avtakende*** eller bare ***strengt avtakende***. Mer formelt:

> Anta at x_1 og x_2 er to verdier i definisjonsmengden til en funksjon *f*, og at $x_2 > x_1$. Da er:
>
> *f* er strengt monotont voksende $\Leftrightarrow$ $f(x_2) > f(x_1)$ for alle x_1 og x_2 der $x_2 > x_1$.
>
> *f* er strengt monotont avtakende $\Leftrightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$ for alle x_1 og x_2 der $x_2 > x_1$.

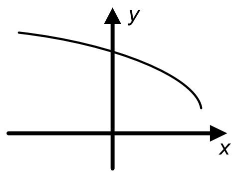
Det er først når vi kommer til derivasjon at vi får et hensiktsmessig hjelpemiddel for å avgjøre om en funksjon er strengt voksende, strengt avtakende eller ingen av delene.

Disse begrepene er viktige i mange sammenhenger. Blant annet er det bare strengt monotont voksende eller strengt monotont avtakende funksjoner som har en invers funksjon.

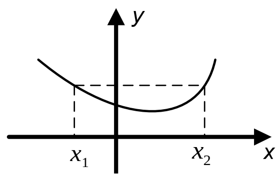
Nedenfor ser du grafene til en strengt voksende funksjon, en strengt avtakende funksjon, og en funksjon som verken er strengt voksende eller strengt avtakende. De to første funksjonene har invers funksjon fordi det er en og kun en *y*-verdi til hver *x*-verdi. Men den siste funksjonen kan ikke ha noen invers funksjon fordi det er *to* *x*-verdier som gir samme *y*-verdi. Funksjonen er altså ikke en-en-tydig.



Strengt voksende.



Strengt avtakende.



Ikke en-en-tydig.

Da vi innførte begrepet "invers funksjon", sa vi at f^{-1} var invers funksjon til *f* hvis og bare hvis $y = f(x)$ og $x = f^{-1}(y)$. Nå er det selve *funksjonsuttrykket* som er viktig. Når vi skriver $x = f^{-1}(y)$, så innebærer det at *y* er den fri variabelen. Men det er jo vanlig å kalle den fri variabelen *x*. Derfor ser vi ofte at *x* og *y* bytter plass i uttrykket for f^{-1} slik at vi skriver $y = f^{-1}(x)$ istedenfor $x = f^{-1}(y)$.

Dersom vi tegner grafene til $y = f(x)$ og $y = f^{-1}(x)$ i samme kartesiske koordinatsystem, oppdager vi noe påfallende: Grafene er symmetriske om den rette linja $y = x$ (d.v.s. om den rette linja som halverer 1. og 3. kvadrant). Dette er i grunnen ganske naturlig ettersom *x* og *y* "bytter rolle". Som en konsekvens av dette vil også definisjons- og verdimengdene "bytte rolle" slik at $V_f = D_{f^{-1}}$, og $D_f = V_{f^{-1}}$. Se eksemplene nedenfor.

***Eksempel 1.4*:** Bestem (om mulig) den inverse funksjonen til:

a) $f(x) = 2x - 1$ når $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

b) $f(x) = x^2 + 1$ når $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Tegn grafene til *f* og til f^{-1} i samme koordinatsystem, og bestem V_f, $D_{f^{-1}}$ og $V_{f^{-1}}$.

Løsning: I figurene nedenfor til høyre er $f(x)$ tegnet med tykk strek, og f^{-1} er tegnet med tynn strek. Halveringslinja $y = x$ er stiplet.

a) Vi skriver

$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y + 1$$

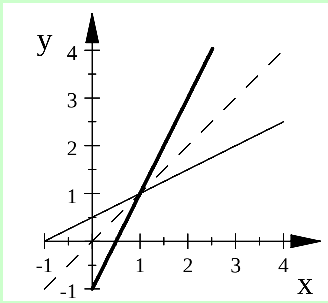
$$\Leftrightarrow \quad \underline{x = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}}$$

Så bytter vi om *x* og *y*, og får

$$y = \underline{\underline{f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}}}.$$

Vi ser at $V_f = \underline{\underline{[-1, \rightarrow\rangle}}$, og at

$$D_{f^{-1}} = V_f = \underline{\underline{[-1, \rightarrow\rangle}},\ V_{f^{-1}} = D_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}.$$



b) Funksjonen $f(x) = x^2 + 1$ er en-en-tydig når $D_f = [0, \rightarrow\rangle$. Da får vi:

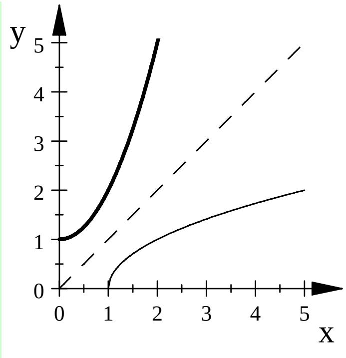
$$y = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = +\sqrt{y-1}.$$

Så bytter vi om *x* og *y*, og får

$$\underline{\underline{y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}}}.$$

Vi ser at $V_f = \underline{\underline{[1, \rightarrow\rangle}}$, og at

$$D_{f^{-1}} = V_f = \underline{\underline{[1, \rightarrow\rangle}},\ V_{f^{-1}} = D_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}.$$

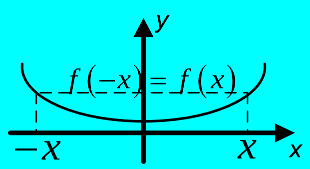


Oppgave 1.2.

1.4. Jamne og odde funksjoner.

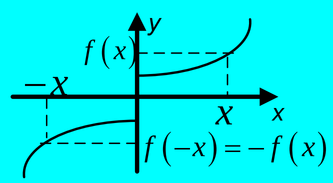
Når du tegner grafer til funksjoner, vil du noen ganger se at grafen "speiler seg" om en linje eller om et punkt. Et par slike "speilinger" er spesielt viktige:

Dersom grafen "speiler seg" om funksjons-aksen (andreaksen), sier vi at funksjonen er ***jamn***. Se figuren nedenfor.



Formell definisjon: En funksjon *f* er ***jamn*** hvis og bare hvis $f(-x) = f(x)$ for alle *x* i definisjonsmengden.

Dersom grafen "speiler seg" om origo, sier vi at funksjonen er ***odde***. Se figuren nedenfor.



Formell definisjon: En funksjon *f* er ***odde*** hvis og bare hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle *x* i definisjonsmengden.

***Eksempel 1.5*:** Undersøk om funksjonene nedenfor er jamne, odde eller ingen av delene:

a) $y = f_1(x) = x^2 + 3$

b) $y = f_2(x) = x^3 - 2x$

c) $y = f_3(x) = 2x^2 + x - 1$

Løsning:

a) $f_1(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f_1(x)$ slik at f_1 er jamn.

b) $f_2(-x) = (-x)^3 - 2\cdot(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f_2(x)$ slik at f_2 er odde.

c) $f_3(-x) = 2(-x)^2 + (-x) - 1 = 2x^2 - x - 1$ som verken er lik $f_3(x)$ eller $-f_3(x)$, slik at f_3 er verken jamn eller odde.

Oppgave 1.3.

Nå er det på tide å se på noen spesielle funksjoner. Vi skal starte med *polynomfunksjoner*.