

## Hyperbolske funksjoner.

Vi skal nå definere tre funksjoner som er avledet av funksjonen  $y = e^x$ . Disse funksjonene kalles *hyperbolske funksjoner*, og er definert slik:

- **Hyperbolsk sinus:**  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .
- **Hyperbolsk cosinus:**  $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ .
- **Hyperbolsk tangens:**  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Disse funksjonene har mange egenskaper som minner om tilsvarende egenskaper for trigonometriske funksjoner, for eksempel:

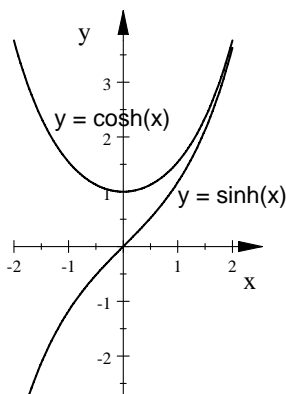
$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1\end{aligned}$$

Og dette minner jo litt om  
 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

Det er denne sammenhengen som har gitt funksjonene navnene *hyperbolsk sinus* og *hyperbolsk cosinus*. De "vanlige" sinus- og cosinus-funksjonene kalles noen ganger *sirkulære* funksjoner fordi alle punkter  $(\cos x, \sin x)$  ligger på sirkelen  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ . På samme måte ligger alle punkter  $(\cosh x, \sinh x)$  på hyperbelen  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .

Det er også mange andre sammenhenger mellom  $\sinh(x)$ ,  $\cosh(x)$  og  $\tanh(x)$  som minner om tilsvarende sammenhenger mellom  $\sin x$ ,  $\cos x$  og  $\tan x$ . Du kan selv påvise noen av disse i [Oppgave 1](#).

Det fins også likheter mellom derivasjons- og integrasjonsregler for hyperbolske funksjoner og tilsvarende regler for trigonometriske funksjoner.



Grafene til  $\sinh(x)$  og  $\cosh(x)$  er skissert til venstre. Av disse er  $\cosh(x)$  mest interessant. Det kan bl.a. vises at dersom en kjede med uendelig små ledd, og ingen friksjon mellom leddene, henges opp mellom to faste punkter, vil kjeden få samme form som grafen til  $\cosh(x)$ -funksjonen. Denne grafen kalles derfor *kjedelinja*.

Det fins også *inverse hyperbolske funksjoner*. Vi skal imidlertid ikke ta med disse her.