# Grenseverdier.

## *1. Ensidige grenseverdier.*

La oss starte med å få terminologien på plass. Skrivemåten

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

skal oppfattes som ***grenseverdien for funksjonen f når x er mindre enn a og går mot a***. Dette kalles også den ***venstresidige grenseverdien for f når x går mot a***.

På tilsvarende måte betyr

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

***grenseverdien for funksjonen f når x er større enn a og går mot a***. Dette kalles også den ***høyresidige grenseverdien for f når x går mot a***.

Det er flere teknikker som kan brukes til å bestemme grenseverdier. En metode som ligger nær opp til definisjonene ovenfor, går ut på å erstatte *x* med $a+\delta$ der $\delta$ er et lite tall, og deretter la $\delta \to 0$. Vi får den venstresidige grenseverdien dersom $\delta < 0$ og går mot null, og den høyresidige grenseverdien dersom $\delta > 0$ og går mot null.

***Eksempel 1:*** Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når} \quad x < 1 \\ 2 - x & \text{når} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Bestem $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ og $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

*Løsning:* For å finne grenseverdien når $x \to 1^-$, må vi bruke funksjonsuttrykket som gjelder når $x < 1$ og erstatte *x* med $1-\delta$. Da blir

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = \lim_{\delta \to 0} (1-\delta)^2 = \lim_{\delta \to 0} \left(1 - 2\delta + \delta^2\right) = 1 - 2 \cdot 0 + 0^2 = \underline{\underline{1}}.$$

For å finne grenseverdien når $x \to 1^+$, må vi bruke funksjonsuttrykket som gjelder når $x > 1$ og erstatte *x* med $1+\delta$. Da blir

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2-x) = \lim_{\delta \to 0} \left(2 - (1+\delta)\right) = \lim_{\delta \to 0} (1-\delta) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}.$$

## *2. Tosidige grenseverdier.*

Vi ser ofte at venstre- og høyresidig grenseverdi er like, slik som i eksemplet ovenfor. Da snakker vi om den ***tosidige grenseverdien*** eller bare om ***grenseverdien*** for *f* når $x \to a$, og skriver

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Da spiller det ingen rolle hvilket fortegn $\delta$ har når vi erstatter *x* med $x+\delta$.

***Eksempel 2:*** Finn

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{2x-3}.$$

*Løsning:* Siden vi skal finne grenseverdien når $x \to 1$, erstatter vi $x$ med $1+\delta$. Da blir

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(1+\delta)^2+1}{2(1+\delta)-3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1+2\delta+\delta^2+1}{2+2\delta-3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+2\delta+2}{-1+2\delta}$$

$$=\frac{0^2+2\cdot 0+2}{-1+2\cdot 0}=\frac{2}{-1}=\underline{\underline{-2}}$$

Nå vil kanskje den oppmerksomme leser innvende at dette kan gjøres enklere: Bare sett inn $x=1$ det opprinnelige uttrykket og regn ut. Da får vi jo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3}=\frac{1^2+1}{2\cdot 1-3}=\frac{2}{-1}=\underline{\underline{-2}}.$$

Jeg må faktisk innrømme at i praktisk arbeid gjør vi det ofte slik. Når vi skal finne $\lim_{x\to a} f(x)$, prøver vi først med direkte innsetting av $x=a$. Men noen ganger fører ikke dette fram, slik eksemplene nedenfor viser.

***Eksempel 3:*** Finn disse grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+1}$

*Løsning:* I begge eksemplene vil direkte innsetting gi brøker der både teller og nevner er lik null. Når vi får slike "$\frac{0}{0}$"-brøker må vi gå grundigere til verks.

a) Vi erstatter $x$ med $2+\delta$ og lar $\delta \to 0$. Da får vi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(2+\delta)^2-4}{(2+\delta)-2}=\lim_{\delta\to 0}\frac{4+4\delta+\delta^2-4}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+4\delta}{\delta}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}(\delta+4)=0+4=\underline{\underline{4}}$$

b) Vi erstatter $x$ med $-1+\delta$ og lar $\delta \to 0$. Da får vi

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(-1+\delta)^2+3(-1+\delta)+2}{(-1+\delta)^3+1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-2\delta+\delta^2-3+3\delta+2}{-1+3\delta-3\delta^2+\delta^3+1}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+\delta}{\delta^3-3\delta^2+3\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta+1}{\delta^2-3\delta+3}=\frac{0+1}{0^2-3\cdot 0+3}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Da jeg omformet $(-1+\delta)^3$, benyttet jeg identiteten

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Den oppmerksomme leser vil kanskje fremdeles innvende at disse eksemplene kan løses enklere. I eksempel a) kan telleren faktoriseres med 3. kvadratsetning. Da får vi:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=\underline{\underline{4}}.$$

Eksempel b) kan også handteres på tilsvarende måte. Men da må vår oppmerksomme leser oppdage at

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1),$$

og at

$$x^3+1=(x^2-x+1)(x+1),$$

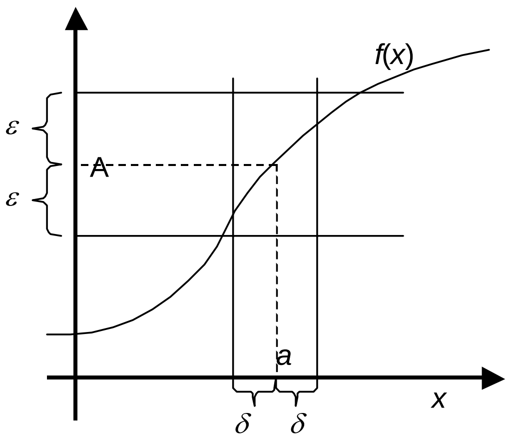
slik at faktoren $x+1$ kan forkortes bort.

**Oppgave 1.**

## 3. Grenseverdisetninger.

Vår oppmerksomme leser har kanskje savnet en skikkelig, formell definisjon av begrepet *grenseverdi*. Her kommer den:

> Gitt en funksjon $f(x)$ med definisjonsmengde $D_f$.
> La $a$ være et punkt innenfor eller på grensen av $D_f$.
> Da sier vi at $f(x)$ går mot $A$ som grense når $x \to a$ hvis og bare hvis:
> For ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ fins et tall $\delta > 0$ slik at
> $$|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$




Denne definisjonen kan illustreres som vist til venstre: Vi tegner opp funksjonsgrafen, merker av $x=a$ og en funksjonsverdi $A$ slik at $A$ ligger innefor et horisontalt "belte" med bredde fra $A-\varepsilon$ til $A+\varepsilon$. Så prøver vi å finne et område på $x$-aksen fra $a-\delta$ til $a+\delta$ som er slik at $f(x)$ ligger innenfor det horisontale "beltet" for alle $x$ i området $\langle a-\delta,\ a+\delta\rangle$. Hvis det er mulig å finne et slikt område på $x$-aksen uansett hvor liten $\varepsilon$ er (d.v.s. uansett hvor smalt "beltet" er), sier vi at $f(x)$ går mot $A$ som grense når $x \to a$.

Definisjonen ovenfor gjelder for *tosidig* grenseverdi, fordi $x$ kan gå mot $a$ fra to sider. Men definisjonen av *ensidig* grenseverdi er helt analog, bare med den forskjellen at $x$ kan gå mot $a$ bare fra en side.

Hvis du har mistanke om at definisjonen ovenfor egner seg dårlig til å *finne* grenseverdier, har du helt rett. Definisjonen egner seg best til å *undersøke* om et bestemt tall $A$ er grenseverdi for en funksjon når $x \to a$. Men den viktigste anvendelsen av definisjonen er å bevise *grense-verdisetninger* som er svært hensiktsmessige i bruk:

La $f(x)$ og $g(x)$ være to funksjoner som har grenseverdier

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = F \text{ og } \lim_{x\to x_0} g(x) = G.$$

La *a* og *b* være to konstante tall.
Da gjelder:

$$\lim_{x\to x_0}\left(a\cdot f(x)+b\cdot g(x)\right) = a\cdot F + b\cdot G$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = F\cdot G$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \text{ dersom } G\neq 0$$

Disse setningene bruker vi ofte helt intuitivt. Gå tilbake til Eksempel 2, der vi skulle finne

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3}.$$

Ved å bruke setningene ovenfor, kan vi resonnere slik:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2\right)+1}{2\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x)-3} = \frac{1^2+1}{2\cdot 1-3} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}.$$

Vi ser at direkte innsetting av $x=1$ faktisk er en tillatt operasjon forutsatt at vi ikke får null i nevner.

Før vi summerer opp, skal vi ta et mer kinkig eksempel:

***Eksempel 4:*** Bestem

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}.$$

*Løsning*: Her legger vi merke til at direkte innsetting av $x=3$ gir

$$\frac{3-3}{2-\sqrt{3+1}} = \frac{0}{2-\sqrt{4}} = \frac{0}{0},$$

som vi ikke uten videre kan finne verdien av. Det hjelper heller ikke å erstatte *x* med $3+\delta$, vi får like fullt et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk når $\delta\to 0$. Det er heller ingen forkortingsmuligheter. Er vi da helt fastlåst?

Det gjenstår en mulighet. Vi kan multiplisere teller og nevner med $2+\sqrt{x+1}$, slik at nevneren kan omformes med 3. kvadratsetning. Dette gir:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{\left(2-\sqrt{x+1}\right)\left(2+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{4-(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{-x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{-\cancel{(x-3)}}$$

$$= \lim_{x\to 3}\left(-2-\sqrt{x+1}\right) = -2-\sqrt{3+1} = \underline{\underline{-4}}$$

Da summerer vi opp: Når du skal finne $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, går du fram slik:

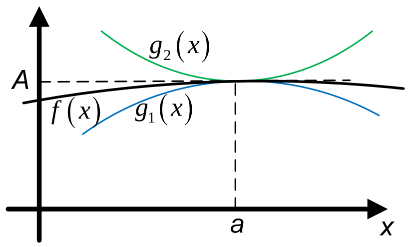
1. Prøv først en direkte innsetting av $x = a$.
2. Hvis det ikke fører fram, kan du prøve å erstatte $x$ med $a+\delta$, forenkle hvis mulig, og la $\delta \to 0$.
3. Hvis $f(x)$ er en brøk, kan du se om det er noen felles faktor i teller og nevner som kan forkortes bort.
4. Hvis $f(x)$ inneholder rotuttrykk, kan du prøve å omforme ved hjelp av 3. kvadratsetning.

**Oppgave 2.**

Disse teknikkene fungerer som regel bra så lenge $f(x)$ er bygd opp av polynomer, brøkfunksjoner eller kvadratrøtter av slike. Men dersom $f(x)$ inneholder trigonometriske funksjoner, eksponential- eller logaritmefunksjoner, er det ikke vanlig at disse teknikkene fører fram. Da trenger vi skarpere verktøy. Vi skal se på slike verktøy etter at vi har vært gjennom *derivasjon*.

## 4. Skvis-teknikken.

Noen ganger kan det lønne seg å ”klemme” en funksjon mellom to andre funksjoner som det er lettere å finne grenseverdien til. Hvis vi kan vise at to funksjoner går mot samme grense når $x \to a$, og at ”vår” funksjon ligger mellom disse funksjonene når $x \to a$, må også ”vår” funksjon gå mot denne grensen. Mer presist formulert:




Anta at $x = a$ ligger i et intervall $I$ der

$$g_1(x) \le f(x) \le g_2(x) \text{ for alle } x \in I,$$

og at $\lim\limits_{x\to a} g_1(x) = \lim\limits_{x\to a} g_2(x) = A$.

Da er også $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Vi skal ikke gi noe formelt bevis for setningen (som vel bør være nokså innlysende). Eksemplet nedenfor viser hvordan vi kan benytte setningen:

***Eksempel 5:*** Finn $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

*Løsning:* Problemet her er at når $x \to 0$, vil $\frac{1}{x} \to \pm\infty$. Da kan vi umulig vite hva $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ går mot når $x \to 0$. Men heldigvis vet vi at $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$. Da er

$$-\frac{\pi}{2}x < x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}x.$$

Vi ser lett at

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0.$$

Dermed må vi ha at

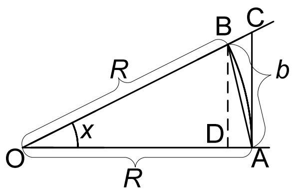
$$\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \underline{\underline{0}}.$$

**Oppgave 3.**

Vi skal nå bruke dette prinsippet til å finne en grenseverdi som vi etter hver får stor nytte av:

Når $x$ er gitt i radianer, er $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$.

Bevis:




På figuren til venstre ser du at:

Arealet av trekant OAC er $F_{\triangle\text{OAC}}=\frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{AC}=\frac{1}{2}R\cdot R\tan x$

Arealet av trekant OAB er $F_{\triangle\text{OAB}}=\frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{BD}=\frac{1}{2}R\cdot R\sin x$

Arealet av sirkelsektor OAB er $F_{\sphericalangle\text{OAB}}=\frac{b}{2\pi R}\cdot\pi R^2=\frac{1}{2}b\cdot R$

Det er innlysende at

$$F_{\triangle\text{OAB}}<F_{\sphericalangle\text{OAB}}<F_{\triangle\text{OAC}} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}R^2\sin x<\tfrac{1}{2}b\cdot R<\tfrac{1}{2}R^2\tan x \quad\Leftrightarrow\quad \sin<\tfrac{b}{R}<\tan x.$$

Men siden $x$ er gitt i radianer, er $x=\frac{b}{R}$. Videre er $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Dermed blir

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Men vi vet at $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)=1$. Dermed har vi vist at $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$.

Dette resultatet benyttes bl.a. til å finne en del andre grenseverdier, som vist i eksemplet nedenfor:

***Eksempel 6:*** Finn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

*Løsning:* Vi ser at når $x\to\frac{\pi}{2}$, vil både teller og nevner gå mot null. Vi prøver derfor å sette $x=\frac{\pi}{2}+\delta$ og deretter la $\delta\to 0$. Da får vi:

$$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\delta-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\delta}{\delta}=\frac{0\cdot\cos\delta-1\cdot\sin\delta}{\delta}=\underline{-\frac{\sin\delta}{\delta}}.$$

Dermed får vi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{\sin\delta}{\delta}\right)=\underline{\underline{-1}}.$$

## *5. Grenseverdier når x går mot uendelig.*

Hittil har vi forutsatt at vi skal finne grenseverdien for $f(x)$ når *x* går mot et fast tall *a*. Men vi får ofte bruk for å finne grenseverdier når $x \to \pm\infty$.

Rent formelt kan slike problem behandles med å erstatte *x* med $\frac{1}{t}$. At $x \to \pm\infty$ er da ekvivalent med at $t \to 0^+$ eller $t \to 0^-$. Dermed er vi tilbake til kjente situasjoner, og vi kan vise at de grenseverdisetningene vi har brukt også gjelder når $x \to \pm\infty$.

Men i mange situasjoner kommer vi raskere i mål ved å benytte at:

Så lenge *a* er et fast tall, er $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a}{x} = 0$

Dette er i grunnen ganske innlysende: Så lenge *a* er et fast tall, kan $\frac{a}{x}$ gjøres så liten vi vil bare ved å gjøre *x* stor nok. Da innser vi at $\frac{a}{x} \to 0$ når $x \to \infty$. Resonnementet gjelder også når $x \to -\infty$.

Eksemplene nedenfor illustrerer teknikken:

***Eksempel 7:*** Bestem disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{1 - 2x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{x^3 - x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x}}$

*Løsning:* Hovedprinsippet er at vi skal dividere teller og nevner med *høyeste* potens av *x*, og deretter la $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.

a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{1 - 2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2 - 2x + 3\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{\left(1 - 2x^2\right)\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 2}$$
$$= \frac{1 - 0 + 0}{0 - 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

b)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^3 - x + 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2x^2 - 3\right)\cdot\frac{1}{x^3}}{\left(x^3 - x + 2\right)\cdot\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$
$$= \frac{-0 - 0}{1 - 0 - 0} = \underline{\underline{0}}$$

c) Her kan det se ut som om vi skal dele teller og nevner med $x^2$. Men $x^2$-leddet står under et rottegn, og vi husker at $\sqrt{x^2} = x$. Dermed innser vi at vi skal dele teller og nevner med *x*. Da får vi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)\cdot\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$

$$= \frac{2+0}{\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{2}}$$

**Oppgave 4**.

Vi avslutter med et eksempel der vi må bruke flere teknikker etter hverandre for å komme i mål:

***Eksempel 8:*** Finn

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right).$$

*Løsning:* Når vi lar $x\to\infty$, får vi et "$\infty-\infty$"-uttrykk. Slike uttrykk kan vi ikke uten videre finne verdien av. For å løse problemet, må vi både benytte 3. kvadratsetning og divisjon med *x* på en litt finurlig måte:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-x}+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2-x\right)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-x}+2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x\cdot\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{2x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} = \frac{-1}{\sqrt{4-0}+2} = \frac{-1}{2+2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

**Oppgave 5**.