3. Brøkfunksjoner.

En funksjon av typen

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

der $P(x)$ og $Q(x)$ begge er polynomer i *x*, kalles en ***brøkfunksjon*** eller en ***rasjonal funksjon***.

En "ekte" brøkfunksjon har lavere grad i teller enn i nevner. Et eksempel på en "ekte" brøk-funksjon er

$$y=f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Dersom graden i teller er større enn eller lik graden i nevner, kan funksjonen omformes til en sum av et polynom og en "ekte" brøkfunksjon ved hjelp av polynomdivisjon slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 3.1: Skriv funksjonen

$$y=f(x)=\frac{x^2-3x+4}{2x-2}$$

som en sum av en polynomfunksjon og en "ekte" brøkfunksjon, og benytt resultatet til å skissere grafen til *y*.

Løsning: Setter opp polynomdivisjonen:

$$\left(x^2-3x+4\right):\left(2x-2\right)=\tfrac{1}{2}x-1+\tfrac{2}{2x-2}=\tfrac{1}{2}x-1+\tfrac{1}{x-1}$$

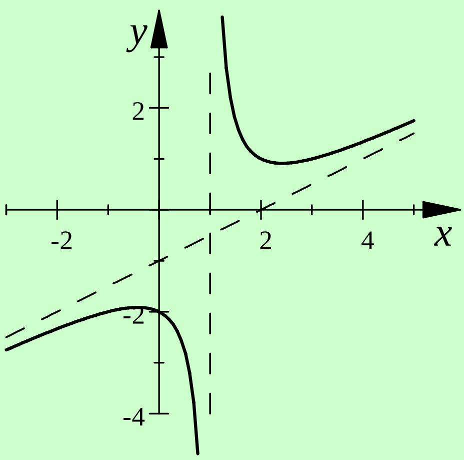
$$\begin{array}{l} -\underline{\left(x^2-x\right)} \\ \qquad -2x+4 \\ \quad -\underline{\left(-2x+2\right)} \\ \qquad\qquad 2 \end{array}$$

Vi ser at

$$f(x)=\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}x-1+\frac{1}{x-1}}}.$$

Når vi skisserer grafen, benytter vi at når *x* er svært nær 1, blir $x-1\approx 0$ slik at $\frac{1}{x-1}\to\pm\infty$ (fortegnet avhenger av om nevneren er positiv eller negativ). Vi får da en ***vertikal asymptote***.

Men når *x* er langt fra 1, vil $\frac{1}{x-1}\to 0$ slik at $y\to\tfrac{1}{2}x-1$. Denne rette linja blir da en ***skrå asymptote***. På figuren til venstre er grafen til *f* tegnet inn sammen med asymptotene.



Oppgave 3.1.