5.3. Fourier-transformen.

Vi har hittil kun arbeidet med periodiske funksjoner, eller vi har brukt halvperiodiske utvidelser til å danne periodiske funksjoner. Men hvis vi skal studere frekvensinnholdet i ikke-periodiske funksjoner, er det best å bruke **Fourier-transformen**. Den er definert slik:

Gitt en stykkevis kontinuerlig funksjon $f(t)$.
Fourier-transformen til *f* er da
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt.$$
Når vi kjenner en Fourier-transformen $F(\omega)$,
kan vi finne den tilhørende funksjonen $f(t)$ slik:
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}dt.$$

Det er påfallende likheter mellom Fourier-rekker på kompleks form og Fourier-transformen. Jeg minner om at Fourier-rekka på kompleks form er
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$$
der
$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{T}^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt.$$
La oss først se på størrelsen ω som inngår i Fourier-transformen. Du husker sikkert at frekvensen til funksjoner av typen $\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ og $\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ er
$$f_n=\frac{n}{2L}.$$
Den tilhørende *vinkel*frekvensen er
$$\omega_n=2\pi f_n=2\pi\cdot\frac{n}{2L}=n\frac{\pi}{L}.$$
Dermed kan vi skrive
$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{T}^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt=\frac{1}{2L}\int_{T}^{T+2L} f(t)e^{-i\omega_n t}dt.$$
Med unntak av faktoren $\frac{1}{2L}$ og integrasjonsgrensene er dette uttrykket for c_n identisk med definisjonen av Fourier-transformen. Dette tyder på at Fourier-transformen $F(\omega)$ spiller omtrent samme rolle som Fourier-koeffisienten c_n.

Men det er en viktig forskjell til: I uttrykket for c_n inngår $\omega_n=n\frac{\pi}{L}$, som kun kan ha visse verdier bestemt av $n=1,2,3,\cdots$. Men i definisjonen av Fourier-transform er ω en *kontinuerlig* variabel. Dette innebærer at mens $\{c_n\}$ kan oppfattes som en *tallfølge*, er Fourier-transformen $F(\omega)$ en *funksjon* av en kontinuerlig variabel ω.

Dette fører også til at når vi bruker kompleks Fourier-rekke, er

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Når vi bruker Fourier-transform, er

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt.$$

Igjen ser vi likheten mellom Fourier-transform og kompleks Fourier-rekke.

Du blir neppe overrasket når jeg nå skal vise at vi kan finne sammenhenger mellom Fourier-transformen og koeffisientene a_n og b_n i den ”vanlige” Fourier-rekka. Vi starter med å anta at *f* er en funksjon som er forskjellig fra null i et intervall fra $t = T$ til $t = T + 2L$, og som er lik null utenfor dette intervallet. Da blir Fourier-transformen til *f*:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{T}^{T+2l} f(t)\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right) dt \\ &= \int_{T}^{T+2L} f(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{T}^{T+2L} f(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned}$$

Sett så $\omega = n\frac{\pi}{L}$, og sammenlikn med formlene for a_n og b_n i den vanlige Fourier-rekka. Da ser du at:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{T}^{T+2L} f(t)dt = \frac{1}{2L}\cdot F(0) \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{T}^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{L}\cdot \mathrm{Re}\left(F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right) \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{T}^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = -\frac{1}{L}\cdot \mathrm{Im}\left(F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right) \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Dersom vi sammenlikner med Fourier-rekka på amplitude-fase-form, får vi flere analogier:

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} = \frac{1}{L}\cdot\left|F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right| \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots \\ \tan\varphi_n &= -\frac{b_n}{a_n} = \tan\left(\arg\left(F\left(n\tfrac{\pi}{L}\right)\right)\right) \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Disse sammenhengene kan forlede deg til å tro at Fourier-transformen kun er en annen måte å beregne Fourier-koffisienter på. Men det er slett ikke tilfelle. Det er flere prinsipielle forskjeller mellom Fourier-rekker og Fourier-transform:

- Fourier-rekker er kun definert for *periodiske* funksjoner, mens Fourier-transform er definert for enhver stykkevis kontinuerlig funksjon.
- Fourier-rekker bygger opp de periodiske funksjonene av sinus-svingninger med bestemte frekvenser av typen $f_n = \frac{n}{2L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, mens Fourier-transformen er en kompleks funksjon av en *kontinuerlig* variabel ω som kan oppfattes som en frekvens.

Nå er tiden inne til å se et eksempel:

***Eksempel 5.3*:** En funksjon *g* er gitt ved

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Finn Fourier-transformen til *g*.
b) Bruk resultatet til å finne Fourier-koeffisientene a_n og b_n for funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 1 & \text{når} \quad t \in [0, \pi \rangle \end{cases}, \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$

fra Eksempel 3.1.

Løsning:

a) Vi bruker definisjonen av Fourier-transform, og får

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega\pi} - 1\right)}}.$$

b) Funksjonen *f* er periodisk med periode $p = 2L = 2\pi \iff L = \pi$. Innenfor intervallet $\langle -\pi, \pi \rangle$ er *f* identisk med *g*. Utenfor dette intervallet er $g(t) = 0$. Da kan vi finne koeffisientene til Fourier-rekka til funksjonen *f* ved å sette inn

$$\omega = n \cdot \frac{\pi}{L} = n \cdot \frac{\pi}{\pi} = n$$

i Fourier-transformen, og får

$$F(n) = \frac{i}{n}\left(e^{-in\pi} - 1\right) = \frac{i}{n}\left(\cos(-n\pi) + i\sin(-n\pi) - 1\right)$$

$$= \frac{i}{n}\left(\cos(n\pi) - i\sin(n\pi) - 1\right) = \frac{i}{n}\left((-1)^n - i \cdot 0 - 1\right).$$

$$= \frac{i}{n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \frac{-2i}{n} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Dette gir da

$$a_n = \frac{1}{L}\operatorname{Re}\left(F(n)\right) = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \underline{0} \quad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$b_n = -\frac{1}{L}\operatorname{Im}\left(F(n)\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Tilfellet a_0 må spesialbehandles, fordi vi får et "null-over-null"-uttrykk når vi setter inn $\omega = n = 0$. Ved hjelp av L'Hôpitals regel får vi:

$$a_0 = \frac{1}{2L}F(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\omega \to 0} \frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega\pi} - 1\right) = \frac{i}{2\pi} \cdot \lim_{\omega \to 0} \frac{e^{-i\omega\pi} - 1}{\omega}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \cdot \lim_{\omega \to 0} \frac{-i\pi e^{-i\omega\pi}}{1} = \frac{i \cdot (-i\pi)}{2\pi} e^0 = \underline{\frac{1}{2}}$$

Disse koeffisientene stemmer helt med resultatene fra eksempel 3.1.

La oss avslutte med å antyde hvordan vi kan komme fra Fourier-rekka på kompleks form og til Fourier-transformen. Vi har tidligere funnet at en periodisk funksjon med periode $p = 2L$ har en frekvens $f_1 = \frac{1}{2L}$ og en *vinkel*frekvens

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{\pi}{L} \iff \frac{1}{L} = \frac{\omega_1}{\pi}.$$

Da kan vi skrive

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{\omega_1}{2\pi}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-n\omega_1 t}dt\ .$$

Fourier-rekka på kompleks form kan da skrives

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\omega_1 t}dt\right)e^{in\omega_1 t}\ .$$

Nå begynner moroa. Vi skal anta at $L \to \infty$. Da vil $\omega_1 \to 0$. Under denne grenseovergangen vil frekvensene av typen $n\omega_1$ komme stadig nærmere hverandre, og kan ved grenseovergangen betraktes som en *kontinuerlig* frekvens ω. Den minst tenkelige øking av frekvens blir da

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1\ .$$

Ved grenseovergangen er det naturlig å erstatte $\Delta\omega$ med $d\omega$. Dessuten må vi integrere fra $-\infty$ til ∞ istedenfor fra T til $T+2L$, og summasjonen kan erstattes med et integral fra $-\infty$ til ∞. Når vi utfører alt dette, får vi:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

der

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\ .$$

Og det er nettopp det vi skulle vise.