5.2. Fourier-rekker på kompleks form.

Vi går rett på sak:

Fourier-rekka til en periodisk funksjon $f(t)$ med periode $p = 2L$ er

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right).$$

Rekka kan også skrives på ***kompleks*** form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$$

der c_n er en kompleks koeffisient gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt.$$

Når $n \geq 1$ er:

$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + i\cdot b_n), \qquad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - i\cdot b_n),$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2\cdot \operatorname{Re}(c_n), \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2\cdot \operatorname{Im}(c_n).$$

Dessuten er $c_0 = a_0$.

Merk at når vi skriver rekka på kompleks form, må vi summere fra $n = -\infty$ til $n = +\infty$.

Dette var mye på en gang (og vi har faktisk mer på lager). Men la oss starte med å vise at det som står i ramma ovenfor faktisk stemmer. Vi starter med å omforme uttrykket $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

I den første summen skifter vi fortegn på summasjonsindeksen *n*, og benytter at

$\sin(-v) = -\sin v$ og at $\cos(-v) = \cos v$.

Da får vi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(\cos\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot\sin\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) - i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right) + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((c_{-n} + c_n)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + i\cdot(-c_{-n} + c_n)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

Når vi nå sammenlikner koeffisienter i rekka over med koeffisientene i den "vanlige" Fourier-rekka, ser vi direkte at

$$c_0 = a_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Hvis vi nå løser ut c_n og c_{-n} av de to siste likningene, får vi at

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i\cdot b_n)$ og $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i\cdot b_n)$.

Men uttrykket for c_n kan skrives

$$c_n = \tfrac{1}{2}a_n - i\cdot\tfrac{1}{2}b_n.$$

Og siden a_n og b_n er reelle tall, ser vi direkte at

$$\mathrm{Re}(c_n) = \tfrac{1}{2}a_n \quad\Leftrightarrow\quad a_n = 2\cdot\mathrm{Re}(c_n)$$
$$\mathrm{Im}(c_n) = -\tfrac{1}{2}b_n \quad\Leftrightarrow\quad b_n = -2\cdot\mathrm{Im}(c_n).$$

Nå gjenstår det ”bare” å vise at

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt$$

for alle $n\in\mathbb{Z}$. Det gjør vi slik:

Når $n = 0$, er

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^0dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)dt = a_0$$

Når $n = 1,2,3,\cdots$ er

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\left(\cos\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right)+i\cdot\sin\left(-n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt\\ &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt - i\cdot\frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\\ &= \tfrac{1}{2}(a_n - i\cdot b_n)\end{aligned}$$

Når $n = -1,-2,-3,\cdots$ er

$$\begin{aligned}c_{-n} &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-i(-n)\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)+i\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt\\ &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt + i\cdot\frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\\ &= \tfrac{1}{2}(a_n + i\cdot b_n)\end{aligned}$$

Dermed har vi vist at

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt$$

for alle $n\in\mathbb{Z}$.

Dette må vi illustrere med et eksempel:

Eksempel 5.3: I Eksempel 3.3 satte vi opp Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = t^2 \text{ når } 0\le t<1,\quad f(t+1) = f(t)$$

a) Sett opp de komplekse Fourier-koeffisientene til denne funksjonen.
b) Finn Fourier-koeffisientene a_n og b_n på grunnlag av uttrykkene for c_n.

Løsning: Denne funksjonen har periode $p = 2L = 1 \quad\Leftrightarrow\quad L = \frac{1}{2}$.

a) Dersom $n=0$, blir

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-i\cdot 0\cdot\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\int_0^1 t^2\cdot 1dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}.$$

Dersom $n\neq 0$, blir (når det ubestemte integralet løses med dataverktøy):

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\int_0^1 t^2 e^{-in\cdot 2\pi t}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^3n^3}\left[e^{-i\cdot 2\pi nt}\left(2i\pi^2n^2t^2+2\pi nt-i\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4\pi^3n^3}\left(e^{-i\cdot 2\pi n}\left(2i\pi^2n^2+2\pi n-i\right)-e^0\left(0+0-i\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^3n^3}\left(\left(\cos(-2\pi n)+i\cdot\sin(-2\pi n)\right)\left(2\pi n+i\left(2\pi^2n^2-1\right)\right)+i\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^3n^3}\left(\left(1+0i\right)\left(2\pi n+i\left(2\pi^2n^2-1\right)\right)+i\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^3n^3}\left(2\pi n+i\cdot 2\pi^2n^2-i+i\right) = \frac{1}{4\pi^3n^3}\left(2\pi n+i\cdot 2\pi^2n^2\right) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2\pi^2n^2}+i\cdot\frac{1}{2\pi n}}}
\end{aligned}$$

b) Når $n=0$, blir $a_0 = c_0 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}$.

Når $n\neq 0$, finner vi a_n og b_n ved å plukke deler av c_n slik:

$$a_n = 2\cdot\mathrm{Re}(c_n) = 2\cdot\frac{1}{2\pi^2n^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi^2n^2}}}.$$

$$b_n = -2\cdot\mathrm{Im}(c_n) = -2\cdot\frac{1}{2\pi n} = \underline{\underline{-\frac{1}{\pi n}}}.$$

Dette stemmer med resultatene fra Eksempel 3.3.

Ved å sammenlikne løsningen av Eksempel 5.3 ovenfor med løsningen av Eksempel 3.3, ser vi at arbeidsmengden er omtrent lik i begge eksemplene. Faktisk kan det noen ganger være lettere å finne a_n og b_n ved å gå veien om c_n, både fordi vi da slipper unna med å løse ett integral istedenfor to, og fordi det ofte er lettere å løse integral med eksponential-faktorer enn å løse integral med sinus- og cosinus-faktorer. Ulempen er at vi til slutt må splitte opp c_n i en realdel og en imaginærdel.

Når vi sammenlikner ei Fourier-rekke på amplitude-fase-form med den tilsvarende Fourier-rekka på kompleks form, får vi et par nyttige resultater:

$$A_n = 2\left|c_n\right|, \qquad \varphi_n = \arg\left(c_n\right).$$

Dette ser vi slik: Fourier-rekka på amplitude-fase-form er

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n \tfrac{\pi}{L} t + \varphi_n\right)$$

der

$$A_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}\ ,\ \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}\ .$$

Av sammenhengen

$$c_n = \tfrac{1}{2} a_n - i \cdot \tfrac{1}{2} b_n$$

ser vi at

$$\left|c_n\right| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} a_n\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2} b_n\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} a_n + \tfrac{1}{4} b_n} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} = \tfrac{1}{2} A_n \quad \Leftrightarrow \quad A_n = 2\left|c_n\right|.$$

Videre ser vi at argumentvinkelen til c_n er gitt ved

$$\tan\left(\arg\left(c_n\right)\right) = \frac{-\tfrac{1}{2} b_n}{\tfrac{1}{2} a_n} = -\frac{b_n}{a_n} = \tan\left(\varphi_n\right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_n = \arg\left(c_n\right).$$

Det faktum at absoluttverdi og argumentvinkel til c_n gir oss amplitude og fasevinkel til den tilhørende cosinus-svingningen, gjør at vi har stor nytte av Fourier-rekker på kompleks form.

Fourier-rekka på kompleks form kan også oppfattes som en overgang til *Fourier-transformen*.