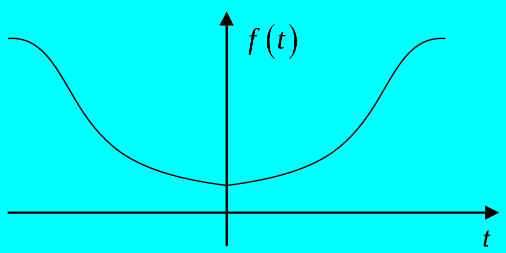
4. Fourier-rekker for jamne og odde funksjoner.

4.1. Beregning av Fourier-koeffisienter for jamne og odde funksjoner.

La os starte med å rippe opp i et par definisjoner:

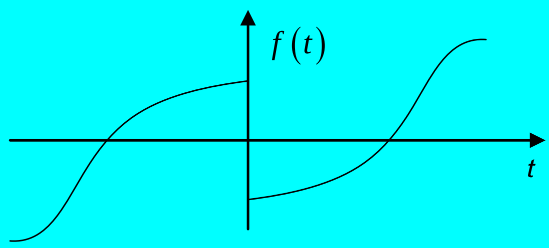
f er ***jamn*** $\Leftrightarrow \quad f(-t) = f(t)$.

Dette svarer til at funksjonsgrafen er symmetrisk om andreaksen slik figuren nedenfor viser:



f er ***odde*** $\Leftrightarrow \quad f(-t) = -f(t)$.

Dette svarer til at funksjonsgrafen er symmetrisk om origo slik figuren nedenfor viser:



Dersom *f* er en jamn eller en odde funksjon, kan beregningen av Fourier-koeffisientene forenkles mye. Vi kan nemlig vise at:

Dersom f er *jamn*, blir Fourier-koeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

Vi sier at vi får ei *Fourier-cosinus-rekke*.

Dersom f er *odde*, blir Fourier-koeffisientene:

$$a_n = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

Vi sier at vi får ei *Fourier-sinus-rekke*.

Du finner beviset for disse setningene i et vedlegg.

Det er to store fordeler ved å bruke disse setningene:

- Vi vet på forhånd at halvparten av koeffisientene blir lik null, og trenger derfor ikke å beregne dem.
- Ved beregning av de gjenværende koeffisientene skal vi kun integrere fra 0 til L. Dette gir som regel mye enklere regninger enn å integrere fra T til $T+2L$.

Men før vi kan bruke setningene, må vi vise at funksjonen er jamn eller odde. Vi starter da gjerne med å tegne funksjonsgrafen. Hvis denne tyder på at funksjonen er jamn eller odde, bør vi påvise dette ved regning. Dette gjøres slik:

La $t \in [0, L]$, slik at $-t \in [-L, 0]$. Erstatt t med $-t$ i funksjonsuttrykket når $t \in [0, L]$. Hvis du da får samme funksjonsuttrykk som det som gjelder når $t \in [-L, 0]$, er funksjonen *jamn*. Hvis du får samme funksjonsuttrykk som det som gjelder når $t \in [-L, 0]$ men med motsatt fortegn, er funksjonen *odde*.

***Eksempel 4.1*:** Bruk setningene ovenfor til å bestemme Fourier-rekka til funksjonen i Eksempel 3.2:

$$f(t) = t \quad \text{når } -\pi < t < \pi,$$
$$f(t+2\pi) = f(t)$$

Løsning: Funksjonsgrafen antyder at funksjonen er odde. Vi viser det slik:
La $t \in [0, \pi]$. Da er $f(t) = t$. Så erstatter vi t med $-t$, og får

$$f(-t) = -t = -f(t).$$

Altså er funksjonen odde. Se også grafen til funksjonen i Eksempel 3.2.

Væpnet med denne kunnskapen og setningene ovenfor, kan vi nå sette:

$$a_n = 0 \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nt) - \frac{t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}(\sin(n\pi) - \sin 0) - \frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{0}{n}\cos 0\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cdot 0 - \frac{\pi}{n}(-1)^n + 0\right) = \underline{-\frac{2}{n}\cdot(-1)^n} \\ &\text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

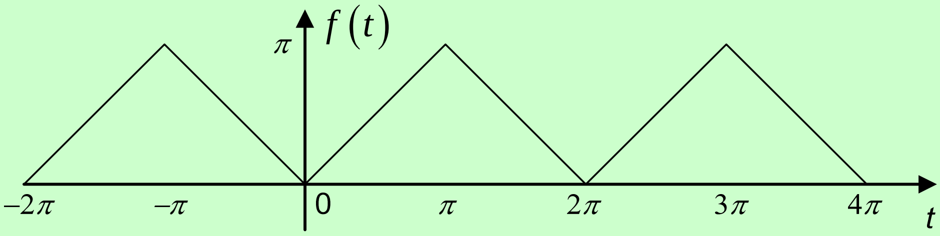
Og dette er de samme koeffisientene som vi fikk før, men med mye mindre regning.

Så tar vi et eksempel med en jamn funksjon:

Eksempel 4.2: Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* definert ved

$$f(t)=\begin{cases} -t & \text{når} \quad -\pi<t<0 \\ t & \text{når} \quad 0\le t<\pi \end{cases}, \qquad f(t+2\pi)=f(t).$$

Løsning: Vi starter med å tegne et utsnitt av grafen til funksjonen:



Grafen tyder på at funksjonen er jamn. Vi viser dette slik:
Vi lar $t\in[0,\pi\rangle$, slik at $f(t)=t$.
Så erstatter vi *t* med –*t*, og får $f(-t)=-t$.
Men –*t* befinner seg i intervallet $\langle-\pi,\,0\rangle$. Der er $f(t)=-t$.
Altså er $f(-t)=f(t)$, som viser at funksjonen er jamn.

Nå er vi klar til å beregne koeffisientene. Vi benytter da at $L=\pi$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\,dt=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\pi^2-0^2\right)=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cdot\cos(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}+\frac{t\cdot\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos(0)\right)+\frac{1}{n}\left(\sin(n\pi)-\sin(0)\right)\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-1\right)\right)$$

$$=\begin{cases} \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{når} \quad n=1,\,3,\,5,\,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n=2,\,4,\,6,\,\cdots \end{cases}$$

$b_n=0$ for n = 1, 2, 3, …

Da blir Fourier-rekka

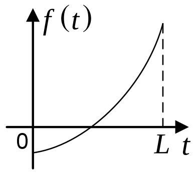
$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos(3t)+\frac{1}{5^2}\cos(5t)+\cdots\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)t\right)}}.$$

Nå er tiden inne til å trene: `Oppgave 4.1` og `Oppgave 4.2`.

Noen ganger kan en periodisk funksjon som i utgangspunktet verken er jamne eller odde, danne utgangspunkt for en jamn eller odde funksjon ved å forskyve funksjonen i koordinat-systemet (eller ved å forskyve koordinatsystemet). Teknikken er vist i et vedlegg.

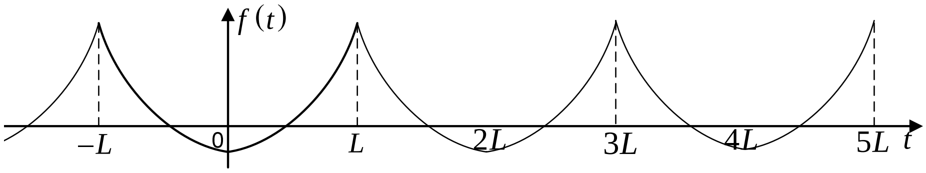
4.2. Halvperiodiske utvidelser.

Vi tar utgangspunkt i en funksjon $f(t)$ som er definert når $t \in \langle 0,\ L \rangle$. Vi kan ikke uten videre finne Fourier-rekka til en slik funksjon siden den ikke er periodisk. Men vi kan lage oss en periodisk funksjon på grunnlag av *f*, og finne Fourier-rekka til den nye (periodiske) funksjonen. Dette kan gjøres på flere måter. Vi skal se på de to vanligste: odde og jamne halvperiodiske utvidelser.

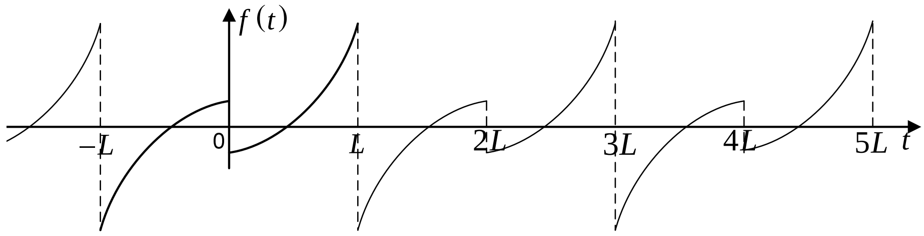


Vi starter med funksjonen $f(t)$, $t \in \langle 0,\ L \rangle$ som for eksempel kan se ut som på grafen til venstre.

Vi får den *jamne halvperiodiske utvidelsen* ved å ”speile” grafen om *y*-aksen, og deretter gjenta mønsteret periodisk slik figuren nedenfor viser:



Vi får den *odde halvperiodiske utvidelsen* ved å ”speile” grafen om origo, og deretter gjenta mønsteret periodisk slik figuren nedenfor viser:



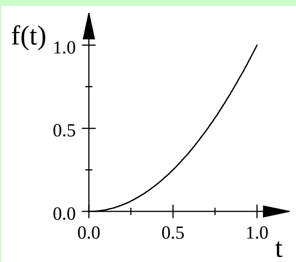
For slike ***halvperiodiske utvidelser*** kan vi finne Fourier-rekka ved hjelp av formlene for henholdsvis jamne og odde funksjoner.

Eksempel 4.3: Vi har gitt funksjonen

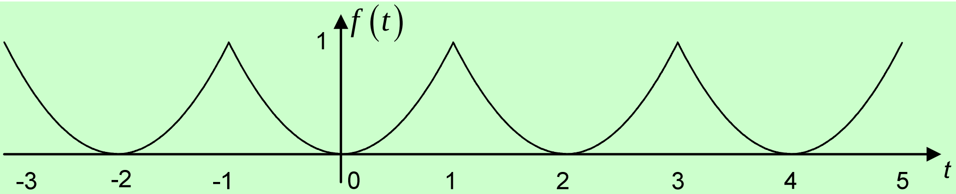
$$f(t) = t^2,\ 0 < t < 1.$$

a) Finn Fourier-rekka til den jamne halvperiodiske utvidelsen.
b) Finn Fourier-rekka til den odde halvperiodiske utvidelsen.

Løsning:
Vi starter med å tegne grafen til $f(t)$:



a) Grafen til den *jamne* halvperiodiske utvidelsen er vist nedenfor:



Den halvperiodiske utvidelsen får periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$. Fourier-rekka blir

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t)$$

der

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\cdot\frac{1}{n^3\pi^3}\left(2n\pi\cos(n\pi) + \left(n^2\pi^2 - 2\right)\sin(n\pi)\right)$$

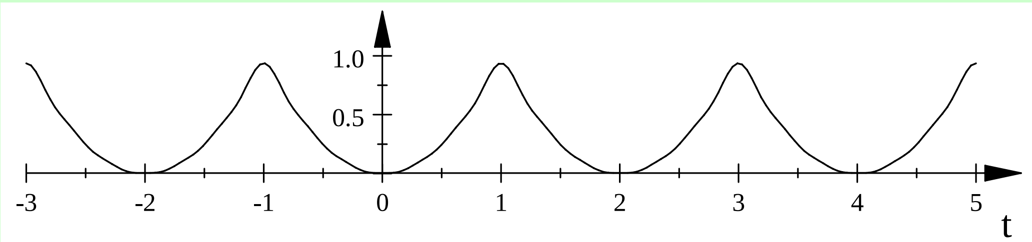
$$= \frac{2}{n^3\pi^3}\left(2n\pi(-1)^n + 0\right) = \underline{\frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2\pi^2}}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

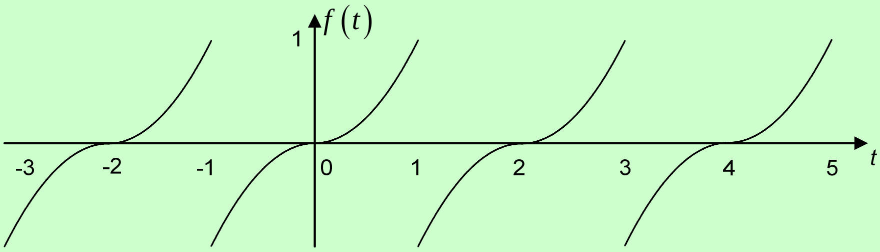
Her er det bestemte integralet beregnet med kalkulator. Altså er Fourier-rekka

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi t)}}.$$

Summerer vi leddene til og med $n = 6$, blir grafen til Fourier-rekka slik:



b) Grafen til den *odde* halvperiodiske utvidelsen er vist nedenfor:



Den halvperiodiske utvidelsen får periode $p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1$. Fourier-rekka blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

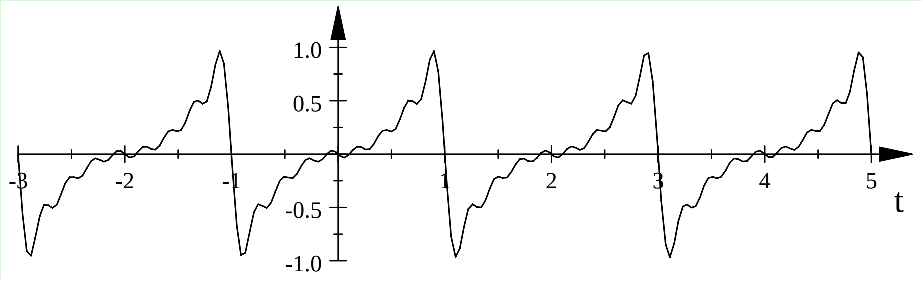
der

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t^2\sin(n\pi t)\,dt \\
&= 2\cdot\frac{-1}{n^3\pi^3}\left(\left(n^2\pi^2-2\right)\cos(n\pi)-2\left(n\pi\sin(n\pi)-1\right)\right) \\
&= \frac{-2}{n^3\pi^3}\left(\left(n^2\pi^2-2\right)(-1)^n+2\right) = \frac{-2}{n^3\pi^3}\left(n^2\pi^2(-1)^n-2(-1)^n+2\right) \\
&= \frac{-2}{n^3\pi^3}\left(n^2\pi^2(-1)^n+2\left(1-(-1)^n\right)\right) = \frac{-2(-1)^n}{n\pi}-\frac{4}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}-\dfrac{8}{n^3\pi^3} & \text{når} \quad n=1,3,5,\cdots \\[2ex] -\dfrac{2}{n\pi} & \text{når} \quad n=2,4,6,\cdots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Her er det bestemte integralet beregnet med kalkulator. Fourier-rekka blir da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$$

der b_n er gitt ovenfor. Summerer vi leddene til og med $n=8$, blir grafen til Fourier-rekka slik:



Nå bør du trene selv på **[Oppgave 4.3](#)**.

Her er et (av mange) eksempel på hva dette kan brukes til: Anta at du har utført en måleserie, og vil lagre denne måleserien. Da må du kanskje lagre tusenvis av måledata. Men hvis du beregner Fourier-transformen av en halvperiodisk utvidelse av måleserien, og lagrer Fourier-koeffisientene, kan det være tilstrekkelig med "bare" noen hundre Fourier-koeffisienter for å få gjenskapt måleserien med svært god nøyaktighet. Smart, ikke sant?

Hvis du skal bruke Fourier-teknikk i for eksempel signalanalyse, kan det lønne seg å lese litt mer om Fourier-rekker:

- Fourier-rekker på amplitude-fase-form.
- Fourier-rekker på kompleks form.
- Fourier-transform.