3. Beregning av Fourier-rekker.

3.1. Formlene for Fourier-koeffisientene.

Vi går rett på sak:

La *f* være en stykkevis kontinuerlig funksjon med periode $p = 2L$.
Den uendelige trigonometriske rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

der koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

kalles **Fourier-rekka til *f***.

Størrelsene a_0, a_n og b_n kalles gjerne ***Fourier-koeffisientene***.

Legg merke til at:

- Vi må forutsette at funksjonen *f* er *periodisk*.
- Vi har innført en størrelse *L* som er halve perioden: $p = 2L$.
- I de integralene som inngår i definisjonen ovenfor, skal du integrere over en hel periode, fra et fritt valgt start-tidspunkt *T* til et slutt-tidspunkt $T + p = T + 2L$.

Så kommer hovedpoenget:

Fouriers setning:
Fourier-rekka til *f* vil konvergere mot *f* overalt unntatt i eventuelle punkter $t = t_0$ der *f* er diskontinuerlig. I slike punkter vil Fourier-rekka konvergere mot

$$\tfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^-} f(t) + \lim_{t\to t_0^+} f(t)\right).$$

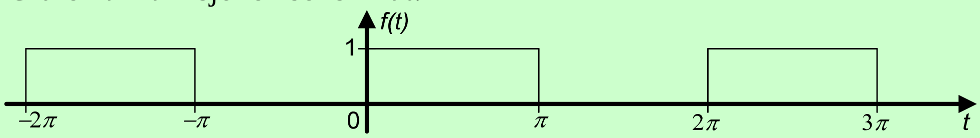
Hovedpoenget i Fouriers setning er et at overalt hvor *f* er kontinuerlig, vil Fourier-rekka være lik den funksjonen *f* som er brukt ved beregning av Fourier-koeffisientene.

Jeg skal etter hvert foreta en delvis utledning av denne setningen. Men først skal vi se på et par eksempler på bruk av setningen. For ikke å forkludre eksemplene med omstendelige integrasjoner, vil jeg om nødvendig løse de ubestemte integralene med dataverktøy.

***Eksempel 3.1*:** Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad t\in\langle -\pi,\, 0\rangle \\ 1 & \text{når} \quad t\in[0,\, \pi\rangle\end{cases}, \qquad\qquad f(t+2\pi)=f(t)$$

Løsning: Grafen til funksjonen ser slik ut:



Vi ser at perioden er $p=2\pi$, slik at i formlene for Fourier-koeffisientene setter vi $L=\pi$. Det er mest hensiktsmessig å integrerer fra $-\pi$ til π (eller fra 0 til 2π). Da får vi:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\,dt+\int_{0}^{\pi}1\,dt\right)=\frac{1}{2\pi}[t]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(\pi-0)=\underline{\frac{1}{2}}.$$

Når $n=1,\,2,\,3,\,\cdots$ får vi:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\,dt+\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(\sin(n\pi)-\sin 0\right)=\underline{0}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\,dt+\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-\cos 0\right)=\frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}\frac{2}{n\pi} & \text{når} \quad n=1,\,3,\,5,\,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n=2,\,4,\,6,\,\cdots\end{cases}$$

Vi ser at alle cosinus-leddene forsvinner, slik at Fourier-rekka blir

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin t+\frac{2}{3\pi}\sin(3t)+\frac{2}{5\pi}\sin(5t)+\frac{2}{7\pi}\sin(7t)+\cdots=\underline{\underline{\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)t\right)}}.$$

Noen merknader til beregningene av koeffisientene:

- a_0 blir *gjennomsnittsverdien* av *f* over en hel periode.
- Husk at *n* er et helt, positivt tall. Da blir:

  $\sin(n\pi)=0$ for alle *n*.

  $\cos(n\pi)$ blir lik -1 når *n* er et oddetall og 1 når *n* er et jamt tall.

  Eller enklere: $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

Det kan ofte være vanskelig å skrive Fourier-rekka med summasjonssymbol. Jeg vil derfor anbefale at du skriver ut noen ledd i rekka slik at du ser systemet, og deretter utforme rekka ved hjelp av summasjonssymbol.

La oss se på konvergensen av rekka i eksemplet ovenfor. Vi danner da partialsummene

$$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t$$

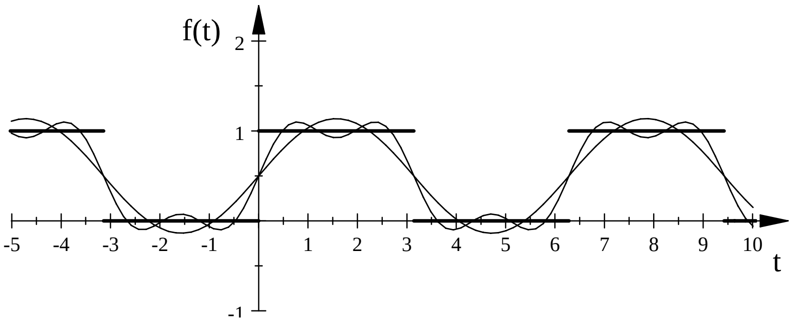
$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t)$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t)$$

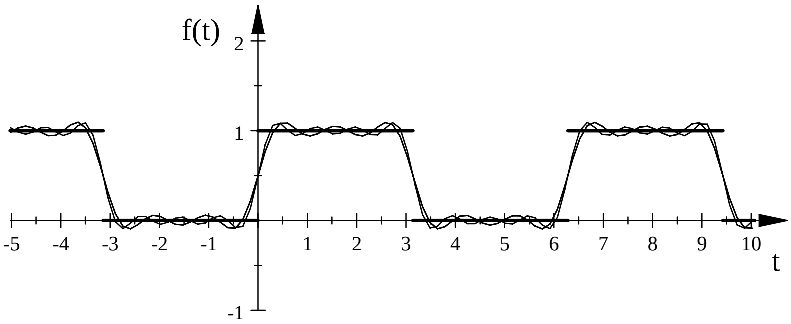
$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t)$$

og tegner grafene til disse summene sammen grafen til *f*.

Først s_1 og s_2:



Så s_3 og s_4:



Du er sikkert enig i at jo flere ledd vi tar med i rekka, jo mer nærmer summen av rekka seg mot *f*.

La oss til slutt se nærmere på hva som skjer når vi setter inn noen spesielle verdier av *t* i rekka. Vi starter med å sette inn $t = 0$. Da er funksjonen diskontinuerlig, funksjonsverdien "hopper" fra 0 til 1. Fouriers setning sier at Fourier-rekka i et slikt diskontinuitetspunkt skal konvergere mot

$$\tfrac{1}{2}(0+1) = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

Og det er nettopp det som skjer, fordi alle sinus-leddene blir lik null når $t = 0$ slik at rekka kun består av konstantleddet $\frac{1}{2}$. Det samme skjer i alle diskontinuitetspunktene (d.v.s. når $t = m \cdot \pi$ der *m* er et helt tall). Da får Fourier-rekka verdien

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left((2n+1) \cdot m\pi\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

fordi alle sinus-leddene blir lik null.

Så kan vi sette $t = \frac{1}{2}\pi$. Da er funksjonsverdien lik 1, slik at

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(3\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(5\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + \frac{2}{7\pi}\sin\left(7\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + \cdots = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot 1 + \frac{2}{3\pi}\cdot(-1) + \frac{2}{5\pi}\cdot 1 + \frac{2}{7\pi}\cdot(-1) + \cdots = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\pi} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{\pi} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{\pi} + \cdots = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Vi ser at vi har funnet summen av den alternerende rekka

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Men vi kan også bruke dette resultatet til å beregne π med ganske stor nøyaktighet, bare ved å ta med tilstrekkelig mange ledd i summen. Vi får

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

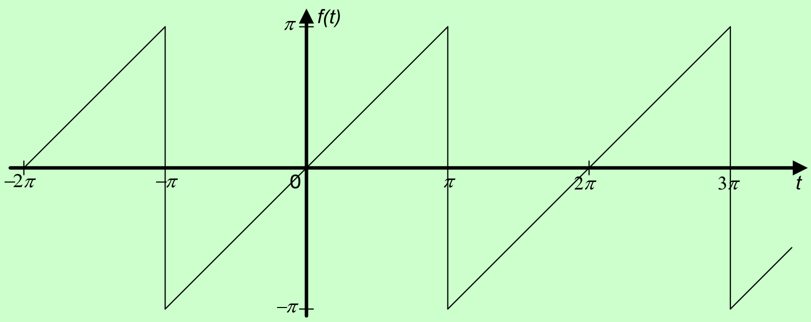
Vi tar et eksempel til:

***Eksempel 3.2*:** Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = t \quad \text{når } -\pi < t < \pi\,,$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Løsning: Grafen til funksjonen ser slik ut:



Også her er perioden $p = 2\pi$ slik at $L = \pi$. Vi integrerer fra $-\pi$ til π, slik at koeffisientene blir:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\pi^2 - (-\pi)^2\right) = \underline{0}.$$

Når $n = 1, 2, 3, \cdots$ får vi:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)+\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos(-n\pi)\right)+\frac{\pi}{n}\sin(n\pi)-\frac{-\pi}{n}\sin(-n\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-(-1)^n\right)+0-0\right)=\underline{0}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nt)-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(\sin(n\pi)-\sin(-n\pi)\right)-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)+\frac{-\pi}{n}\cos(-n\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0-0-\frac{\pi}{n}(-1)^n-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right)=\underline{\frac{-2}{n}(-1)^n}$$

Altså blir Fourier-rekka

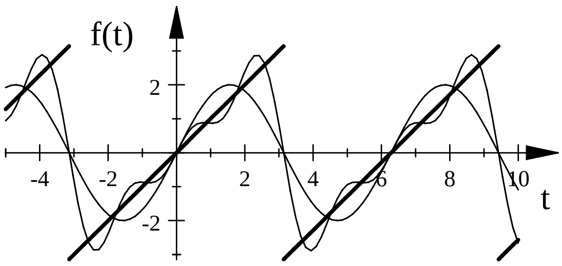
$$0+\frac{2}{1}\sin t-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-\frac{2}{4}\sin(4t)+\cdots=\underline{\underline{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)}}.$$

Figurene nedenfor antyder hvordan Fourier-rekka konvergerer mot den gitte funksjonen. Først ser vi grafene til partialsummene

$$s_1=\frac{2}{1}\sin(t)$$

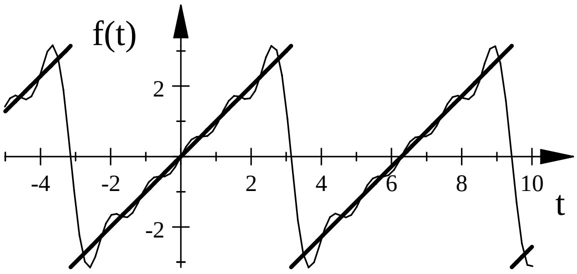
og

$$s_3=\frac{2}{1}\sin(t)-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t):$$



Så tar vi partialsummen

$$s_5=\frac{2}{1}\sin(t)-\frac{2}{2}\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-\frac{2}{4}\sin(4t)+\frac{2}{5}\sin(5t):$$



Du ser hvordan Fourier-rekka konvergerer mot den opprinnelige funksjonen når antall ledd øker?

Begge eksemplene ovenfor hadde perioder $p = 2\pi$. La oss avslutte med et eksempel som har en annen periode. Som før utføres de fleste ubestemte integrasjoner med dataverktøy.

Eksempel 3.3: Finn Fourier-rekka til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = t^2 \quad \text{når } 0 \le t < 1, \quad f(t+1) = f(t).$$

Bruk resultatet til å finne summen av den uendelige rekka som framkommer når $t = 0$.

Løsning: Denne funksjonen har periode

$$p = 2L = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L = \tfrac{1}{2}.$$

Dette fører til at

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

og

$$n\frac{\pi}{L}t = n \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{2}}t = 2n\pi t.$$

Da blir

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \underline{\frac{1}{3}}.$$

Når $n = 1, 2, 3, \cdots$ får vi:

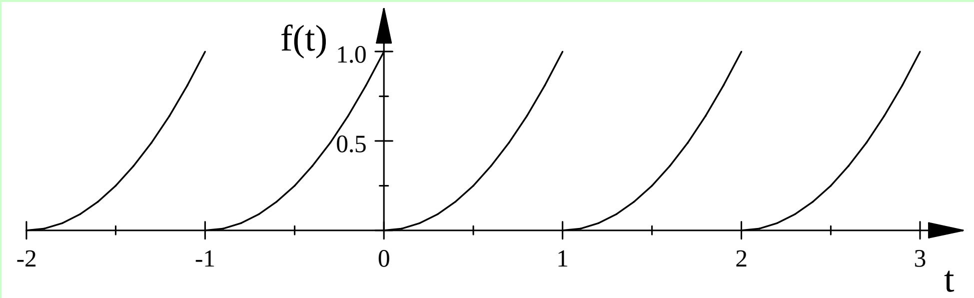
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_0^1 f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 t^2\cdot\cos(2n\pi t)\,dt \\
&= 2\cdot\frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[2\pi nt\cos(2n\pi t) - \sin(2n\pi t) + 2\pi^2 n^2 t^2 \sin(2n\pi t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi^3 n^3}\left(2\pi n\cos(2n\pi) - \sin(2n\pi) + 2\pi^2 n^2 \sin(2n\pi) - 0 + \sin 0 - 0\right) \\
&= \frac{1}{2\pi^3 n^3}(2n\pi\cdot 1) = \underline{\frac{1}{\pi^2 n^2}}
\end{aligned}$$

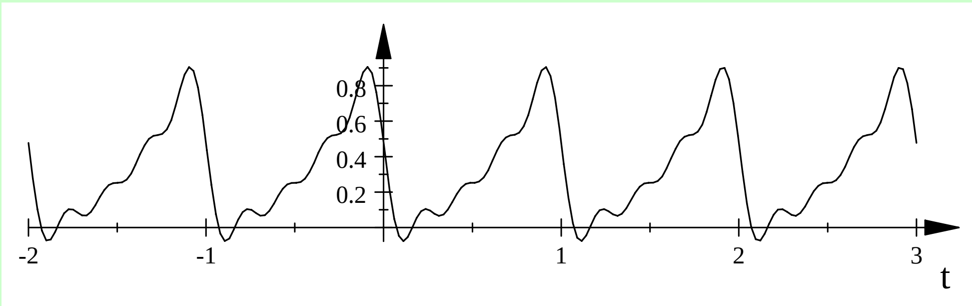
$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_0^1 f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 t^2\cdot\sin(2n\pi t)\,dt \\
&= 2\cdot\frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[\cos(2n\pi t) + 2\pi nt\sin(2n\pi t) - 2\pi^2 n^2 t^2 \cos(2n\pi t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi^3 n^3}\left(\cos(2n\pi) + 2\pi n\sin(2n\pi) - 2\pi^2 n^2 \cos(2n\pi) - \cos 0 - 0 + 0\right) \\
&= \frac{1}{2\pi^3 n^3}\left(1 + 0 - 2\pi^2 n^2\cdot 1 - 1\right) = \frac{1}{2\pi^3 n^3}\left(-2\pi^2 n^2\right) = \underline{-\frac{1}{\pi n}}
\end{aligned}$$

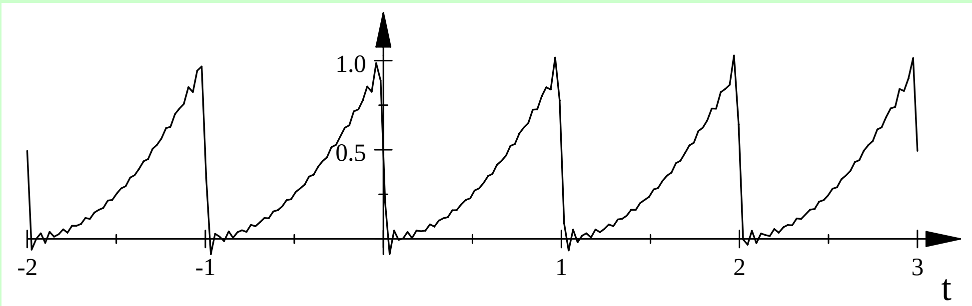
Altså blir Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2n\pi t) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi t)}}.$$

Som kontroll har jeg tegnet grafen til den opprinnelige funksjonen *f*, sammen med partialsummer med henholdsvis 4 og 15 ledd i hver rekke.







Når $t=0$, blir alle sinus-leddene lik null mens alle cosinus-faktorene blir lik 1. Da blir

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 1=\frac{1}{2}(1+0) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}}.$$

Beregningene av Fourier-koeffisientene kan medføre kronglete integrasjoner. Jeg har laget et lite notat om hvordan du kan bruke Scientific Notebook til å beregne disse koeffisientene. I det notatet finner du også hint om hvordan du kan få tegnet opp grafen til de første leddene i ei Fourier-rekke.

Oppgave 3.1.

3.2. Utledning av formlene for Fourier-koeffisientene.

Nå er det på tide å vise hvordan formlene for Fourier-koeffisientene framkommer. Vi skal begrense oss til å utlede disse formlene, og skal ikke undersøke konvergensen. Vi skal derfor anta at når vi har en periodisk funksjon $f(t)$ med periode $2L$, er det alltid mulig å finne koeffisienter a_0, a_n og b_n slik at

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) \qquad (*)$$

Vi får bruk for noen integrasjonsformler:

Når $m \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{N}$, er:

1) $\int_T^{T+2L} \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \int_T^{T+2L} \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 0$ for alle m og n.

2) $\int_T^{T+2L} \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$

3) $\int_T^{T+2L} \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad m \neq n \\ L & \text{når} \quad m = n \end{cases}$

4) $\int_T^{T+2L} \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 0$ for alle m og n.

Merk at på en strekning fra $t = T$ til $t = T + 2L$ vil funksjonene $\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$ og $\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$ utføre n hele svingninger.

Du klarer sikkert å utlede formel (1) selv. De andre tre formlene er mer plundrete. Jeg har derfor flyttet hele utledningen til et vedlegg.

Vi starter med å utlede formelen for a_0. Vi integrerer da (*) over en periode, d.v.s. fra $t = T$ til $t = T + 2L$. Da får vi

$$\begin{aligned}\int_T^{T+2L} f(t)\,dt &= \int_T^{T+2L}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)dt \\ &= a_0\int_T^{T+2L} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_T^{T+2L}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_T^{T+2L}\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\right) \\ &= a_0\left[t\right]_T^{T+2L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 = a_0\left((T+2L)-T\right) = 2L\cdot a_0\end{aligned}$$

slik at

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_T^{T+2L} f(t)\,dt.$$

Så skal vi utlede formlene for a_n. Vi multipliserer da (*) med $\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)$ og integrerer over en periode. Da får vi:

$$\begin{aligned}\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = {}& a_0\int_T^{T+2L}\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T^{T+2L}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_T^{T+2L}\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\end{aligned}$$

Nå tar vi en titt på hjelpesetningene 1, 2 og 4. Da ser vi at alle integralene blir lik null, med ett viktig unntak: Når $n = m$ blir

$$\int_T^{T+2\pi} \cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = L\,.$$

Dermed står vi igjen med

$$\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = a_0\cdot 0 + a_m\cdot L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot 0$$

som gir

$$\underline{\underline{a_m = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\cos\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\,.}}$$

Og dette er jo den formelen vi skulle fram til (at indeksen heter *m* istedenfor *n* har jo ingen betydning).

På samme måte utledes formelen for b_n. Vi multipliserer (*) med $\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)$ og integrerer over en periode. Da får vi:

$$\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = a_0\int_T^{T+2L}\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_T^{T+2L}\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_T^{T+2L}\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt$$

Nå bruker vi hjelpesetningene 1, 3 og 4. Da ser vi at alle integralene blir lik null, med ett viktig unntak: Når $n = m$ blir

$$\int_T^{T+2\pi} \sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = L\,.$$

Dermed står vi igjen med

$$\int_T^{T+2L} f(t)\cdot\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = a_0\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 0 + b_m\cdot L$$

som gir

$$\underline{\underline{b_m = \frac{1}{L}\int_T^{T+2L} f(t)\sin\left(m\tfrac{\pi}{L}t\right)dt\,.}}$$

3.3. Et større eksempel.

Til slutt skal vi se på et større eksempel, som fører til nokså kompliserte integrasjoner dersom de skal utføres for hand. Beregning av ubestemte integral er derfor stort sett foretatt ved hjelp av dataverktøy. Dersom du vil utføre integrasjonene for hand, bør du ta en titt på utledningen av formlene for Fourier-koeffisientene der de aktuelle integrasjonsformlene er utledet.

***Eksempel 3.4*:** Dersom sinus-spenningen

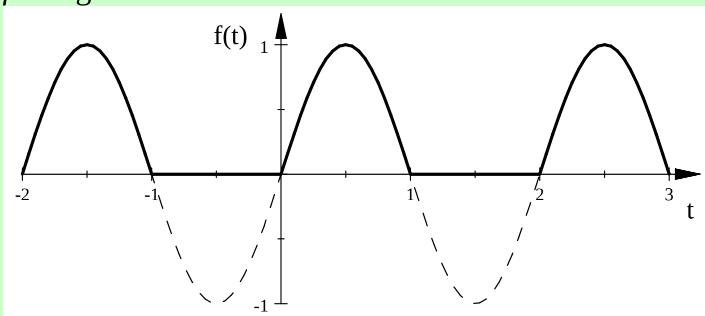
$$g(t) = \sin(\pi t)$$

likerettes, får vi det periodiske signalet

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad -1 < t < 0 \\ \sin(\pi t) & \text{når} \quad 0 \le t < 1 \end{cases}, \qquad f(t+2) = f(t)\,.$$

Finn Fourier-rekka til denne funksjonen.

Løsning: Grafen til *f* er tegnet nedenfor:



Dette er en periodisk funksjon med periode

$$p = 2L = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = 1.$$

Fourier-rekka blir av formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t).$$

Vi beregner koeffisientene slik:

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot 1}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin(\pi t)\,dt + \int_1^2 0\,dt\right) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{2\pi}(-1-1) = \underline{\frac{1}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\cdot\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-1)\pi t)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)\pi t)}{n+1}\right]_0^1$$

der integrasjonen er utført med kalkulator. Men på grunn av faktoren $(n-1)$ i den første nevneren, er dette resultatet kun gyldig når $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$. Tilfellet $n = 1$ må altså spesialbehandles.

Når vi setter inn grensene, benytter vi at $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Da blir

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi) - \cos 0}{n-1} - \frac{\cos((n+1)\pi) - \cos 0}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1}\right).$$

Men

$$(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} = \begin{cases} -1 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \\ 1 & \text{når} \quad n = 3,5,7,\cdots \end{cases}$$

Da får vi at:

Når $n = 2,4,6,\cdots$ er

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1-1}{n-1} - \frac{-1-1}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2}{n-1} + \frac{2}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(n+1)+(n-1)}{(n-1)(n+1)}\right) = \underline{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-2}{n^2-1}}$$

Når $n = 3, 5, 7, \cdots$ er

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-1}{n-1} - \frac{1-1}{n+1}\right) = \underline{0}.$$

Nå gjenstår det bare å behandle spesialtilfellet $n = 1$. Da blir

$$a_1 = \frac{1}{1}\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{1}t\right)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\cos(\pi t)\,dt$$

$$= \left[\frac{-\cos(2\pi t)}{4\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{4\pi}\left(-\cos(2\pi) + \cos 0\right) = \frac{1}{4\pi}(-1+1) = \underline{0}$$

Vi får altså at

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ \dfrac{-2}{\pi\left(n^2-1\right)} & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Beregningen av b_n er (nesten) like omstendelig:

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{1}t\right)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-1)\pi t)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)\pi t)}{n+1}\right]_0^1$$

der integrasjonen er utført med kalkulator. Men på grunn av faktoren $(n-1)$ i den første nevneren, er dette resultatet kun gyldig når $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$. Tilfellet $n = 1$ må altså spesialbehandles. Vi setter inn grensene, og får at

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-1)\pi t)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)\pi t)}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin((n-1)\pi) - \sin 0}{n-1} - \frac{\sin((n+1)\pi) - \sin 0}{n+1}\right) = \underline{0}$$

Nå gjenstår det bare å behandle spesialtilfellet $n = 1$. Da blir

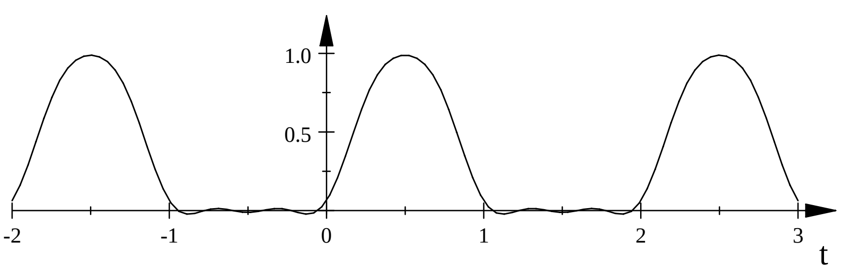
$$b_1 = \frac{1}{1}\int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{1}t\right)dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\sin(\pi t)\,dt = \int_0^1 \sin^2(\pi t)\,dt = \frac{1}{4\pi}\left[2\pi t - \sin(2\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi - \sin(2\pi) - 0 + \sin 0\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

Vi samler trådene, og setter opp Fourier-rekka til *f*:

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2-1}\cos(2k\pi t) + \frac{1}{2}\sin(\pi t).}}$$

Figuren nedenfor viser grafen av den rekka som framkommer ved å ta med bare to ledd i summen. Vi ser at resultatet er overraskende bra.



Oppgave 3.2, **Oppgave 3.3**.

Svært ofte kommer du bort i periodiske funksjoner som er enten jamne eller odde. Da er det mye lettere å beregne Fourier-koeffisientene, som vi skal se i neste notat.

Fourier-rekker kan bl.a. brukes til å løse differensiallikninger som inneholder periodiske funksjoner. Teknikken er illustrert i et lite notat.