3.4. Løsing av differensiallikninger.

Vi skal nå se hvordan vi kan bruke Fourier-rekker til å løse differensiallikninger der en periodisk funksjon inngår. Vi skal nøye oss med å se på et lite eksempel som illustrerer den generelle framgangsmåten.

Eksempel 3.5: Løs differensiallikningen

$$y'(t) + y(t) = f(t).$$

der

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{når} \quad -1 < t < 0 \\ 1 & \text{når} \quad 0 < t < 1 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t)$$

Løsning: Vi vet at løsningen av slike differensiallikninger kan skrives på formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

der $y_h(t)$ er løsningen av den homogene likningen mens $y_p(t)$ er en partikulær løsning.

Vi finner først $y_h(t)$ ved å løse likningen

$$y_h' + y_h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_h}{dt} = -y_h \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy_h}{y_h} = -\int dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln y_h = -t + \ln C$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y_h - \ln C = -t \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y_h}{C}\right) = -t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_h}{C} = e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad y_h(t) = \underline{Ce^{-t}}$$

Vi ser at $y_h(t) \to 0$ når $t \to \infty$. Derfor er den partikulære løsningen mest interessant. For å finne en partikulær løsning, skriver vi først $f(t)$ som ei Fourier-rekke. Vi merker oss da at $f(t)$ er en odde funksjon med periode $p = 2 \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2}p = 1$. Da blir

$a_n = 0$ for alle *n*.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = 2\int_0^1 1\cdot\sin(n\pi t)\,dt = 2\frac{-1}{n\pi}\left[\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Fourier-rekka til $f(t)$ blir da

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) = \underline{\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)\pi t)}.$$

Når vi nå skal finne en partikulær løsning $y_p(t)$, er det rimelig å anta at $y_p(t)$ er av samme form som $f(t)$. Men selv om $f(t)$ bare inneholder sinus-ledd, må vi være forberedt på at $y_p(t)$ inneholder en kombinasjon av sinus- og cosinus-ledd. Da får vi:

$$y_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \sin(n\pi t) + c_n \cos(n\pi t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \cdot n\pi \cdot \cos(n\pi t) - c_n \cdot n\pi \cdot \sin(n\pi t)\right)$$

Så setter vi dette inn i likningen. For oversiktens skyld setter vi bare inn i venstre side først:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \cdot n\pi \cdot \cos(n\pi t) - c_n \cdot n\pi \cdot \sin(n\pi t)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(s_n \sin(n\pi t) + c_n \cos(n\pi t)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left((n\pi s_n + c_n)\cos(n\pi t) + (-n\pi c_n + s_n)\sin(n\pi t)\right)$$

Dersom denne venstresiden av likningen skal være lik Fourier-rekka på høyresiden for alle verdier av *t*, må vi for alle $n = 1,2,3,\cdots$ ha at:

$$n\pi s_n + c_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = -n\pi s_n$$

$$-n\pi c_n + s_n = b_n \quad \Leftrightarrow \quad -n\pi(-n\pi s_n) + s_n = b_n$$

$$\Leftrightarrow \quad s_n\left(n^2\pi^2 + 1\right)s_n = b_n \quad \Leftrightarrow \quad s_n = \underline{\frac{1}{n^2\pi^2+1}b_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2\pi^2+1}\cdot\dfrac{4}{n\pi} & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Da blir

$$c_n = -n\pi s_n = \underline{\frac{-n\pi}{n^2\pi^2+1}b_n} = \begin{cases} \dfrac{-n\pi}{n^2\pi^2+1}\cdot\dfrac{4}{n\pi} = \dfrac{-4}{n^2\pi^2+1} & \text{når} \quad n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når} \quad n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Vi samler trådene, og finner at

$$y(t) = Ce^{-t} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(s_n \sin(n\pi t) + c_n \cos(n\pi t)\right)$$

$$\underline{\underline{= Ce^{-t} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left((2k-1)^2\pi^2+1\right)}\left(\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\pi t) - \cos((2k-1)\pi t)\right)\right)}}$$

Det ble ganske mye arbeid selv om dette var et enkelt eksempel. Men framgangsmåten blir alltid den samme: Finn Fourier-rekka til periodiske funksjoner som inngår, og anta at løsningen er av samme form som den eller de leddene som inngår i Fourier-rekkene. Dersom noen ledd i slike løsninger allerede inngår i løsningen av den homogene likningen, må slike ledd multipliseres med *t*. Etter en del regning vil du få rekursive likninger som kan brukes til å bestemme koeffisientene i løsnings-rekkene.