5. Mer om Fourier-rekker.

5.1. Frekvens, amplitude og fase.

Du vet nå at en periodisk funksjon $f(t)$ med periode $p = 2L$ kan uttrykkes ved en Fourier-rekke

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right).$$

som konvergerer mot $f(t)$ overalt hvor $f(t)$ er kontinuerlig. Men noen ganger er det mer gunstig å skrive Fourier-rekka på en annen form:

Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

kan skrives på ***amplitude-fase-formen***

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t + \varphi_n\right)$$

der

$$A_0 = |a_0| \qquad \text{og} \qquad \varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad a_0 > 0 \\ \pi & \text{når} \quad a_0 < 0 \end{cases}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}\,, \qquad \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \qquad \text{når } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dette viser vi ved å benytte at

$$\cos(v + \varphi) = \cos v \cdot \cos\varphi - \sin v \cdot \sin\varphi\,.$$

Da får vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t + \varphi_n\right) = A_0\cos\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\cos\varphi_n - \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\cdot\sin\varphi_n\right)$$

$$= A_0\cos\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\varphi_n\cdot\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) - A_n\sin\varphi_n\cdot\sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)\right)$$

Sammenlikning av ledd i rekka over med tilsvarende ledd i den vanlige Fourier-rekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)$$

gir nå at siden A_0 skal være positiv, er det naturlig å sette $A_0 = |a_0|$ mens $\cos\varphi_0 = \pm 1$ for å få rett fortegn. For alle andre verdier av n blir:

$$A_n\cos\varphi_n = a_n \qquad \text{og} \qquad -A_n\sin\varphi_n = b_n\,.$$

For å finne A_n, kvadrerer vi disse likningene og legger dem sammen. Da får vi

$$A_n^{\,2}\cos^2\varphi_n + A_n^{\,2}\sin^2\varphi_n = a_n^{\,2} + b_n^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad A_n^{\,2}\left(\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n\right) = a_n^{\,2} + b_n^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$$

For å finne φ_n, deler vi likningene på hverandre, og får

$$\frac{-A_n \sin\varphi_n}{A_n \cos\varphi_n} = \frac{b_n}{a_n} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}.$$

Du får nå to mulige verdier av φ_n i intervallet $[0, 2\pi)$, og må velge den verdien som gir positiv A_n.

Du ser at for hver verdi av *n* har vi erstattet $a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ med *ett* cosinus-ledd: $A_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t + \varphi_n\right)$. Vi kunne forresten godt ha brukt et sinus-ledd isteden. Størrelsen A_n er ***amplituden*** for svingningen med vinkelfrekvens $n\frac{\pi}{L}t$ og er alltid positiv, mens φ_n er ***fasevinkelen*** for svingningen med denne vinkelfrekvensen.

For sikkerhets skyld kan vi jo repetere begrepene *periode, frekvens* og *vinkelfrekvens*. Når vi sier at leddene $a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ og $b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ er periodiske med *periode* p_n, betyr det at

$$n\tfrac{\pi}{L}(t + p_n) = n\tfrac{\pi}{L}t + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad n\tfrac{\pi}{L}t + n\tfrac{\pi}{L}p_n = n\tfrac{\pi}{L}t + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad n\tfrac{\pi}{L}p_n = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p_n = \tfrac{2L}{n}}.$$

Frekvensen f_n til disse leddene er da gitt ved

$$f_n = \tfrac{1}{p_n} = \underline{\tfrac{n}{2L}},$$

mens *vinkelfrekvensen* er $2\pi f_n = 2\pi \cdot \frac{n}{2L} = n \cdot \frac{\pi}{L}$. Legg merke til at frekvensen og vinkelfrekvensen er proporsjonal med *n*.

Eksempel 5.1: I Eksempel 3.2 viste vi at Fourier-rekka til den periodiske funksjonen

$$f(t) = t \text{ når } -\pi < t < \pi, \qquad f(t + 2\pi) = f(t)$$

er

$$F(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) = \frac{2}{1}\sin t - \frac{2}{2}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{2}{4}\sin(4t) + \cdots.$$

Skriv denne Fourier-rekka på amplitude-fase-form.

Løsning: Vi ser direkte at

$$A_0 = 0$$

og at

$$A_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} = \sqrt{0^2 + \left((-1)^n \cdot \tfrac{2}{n}\right)^2} = \tfrac{2}{n} \text{ når } n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Siden $a_n = 0$ for alle *n*, blir fasevinkelen φ_n gitt ved

$$\tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \to \begin{cases} -\infty & \text{når } b_n > 0 \\ \infty & \text{når } b_n < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_n = \begin{matrix} -\frac{1}{2}\pi & \text{når} & n = 1, 3, 5, \cdots \\ \frac{1}{2}\pi & \text{når} & n = 2, 4, 6, \cdots \end{matrix}$$

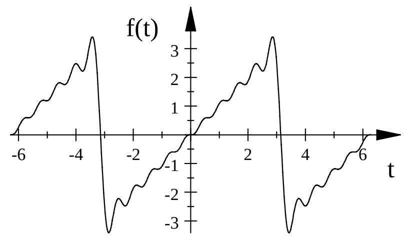
Dermed blir rekka

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt + \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n} \cos\left(nt + (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

For sammenlikningens skyld kan du jo legge merke til at

$$\cos\left(nt - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \sin(nt),$$
$$\cos\left(nt + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin(nt).$$

Dermed er du tilbake til den Fourier-rekka vi startet med.



Til venstre ser du et plot av de 10 første leddene i Fourier-rekka til $f(t)$. Du ser at den opprinnelige periodiske funksjonen blir ikke særlig godt gjengitt med bare 10 ledd. Det skyldes at amplituden $A_n = \frac{2}{n}$ avtar nokså langsomt når *n* øker, slik at vi må ha med ganske mange ledd før A_n blir så liten at bidraget blir neglisjerbart.

La oss avslutte med et eksempel der vi ikke trenger å ta med så mange ledd før Fourier-rekka blir en meget god tilnærmelse til den funksjonen vi gikk ut fra.

Eksempel 5.2: Sett opp Fourier-rekka på amplitude-fase-form til funksjonen *f* gitt ved

$$f(t) = \tfrac{1}{\pi}t^2 \text{ når } -\pi < t < \pi, \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

Løsning: Finner først koeffisientene på vanlig måte, der vanskelige integral er løst med dataverktøy. Benytter da at perioden er $p = 2L = 2\pi \iff L = \pi$. Da blir:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{\pi}t^2 dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\tfrac{1}{\pi}\cdot\tfrac{1}{3}t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi^2}\left(\pi^3 - (-\pi^3)\right) = \underline{\tfrac{1}{3}\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\tfrac{\pi}{L}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{\pi}t^2\cdot\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n\cdot 4\pi}{n^2} = \underline{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}}$$

$b_n = \underline{0}$ fordi funksjonen er jamn.

Fourier-rekka blir da

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) = \underline{\tfrac{1}{3}\pi + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)}.$$

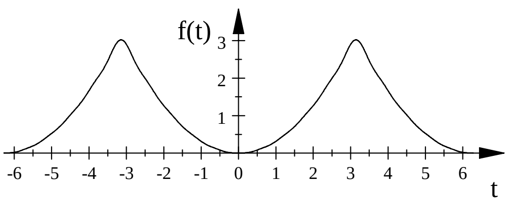
Vi tar hensyn til fortegnsskiftet ved å legge inn en fasevinkel φ_n gitt ved

$$\varphi_n = \begin{cases} \pi & \text{når } n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & \text{når } n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

Da blir

$$\underline{\underline{F(t) = \tfrac{1}{3}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\cos(nt+\varphi_n)}}.$$

Når vi ser bort fra konstantleddet $\frac{1}{3}\pi$, er amplituden i eksemplet foran gitt ved $A_n = \frac{4}{\pi n^2}$. Faktoren n^2 i nevner fører til at A_n avtar raskt når *n* øker. Vi må derfor vente at det ikke trengs mange ledd i Fourier-rekka for å gi en god tilnærming til den opprinnelige funksjonen.



Grafen til venstre viser summen av de 10 første leddene i Fourier-rekka for funksjonen i eksemplet foran. Du ser at tilnærmingen til den opprinnelige funksjonen er mye bedre nå enn i det første eksemplet. Dette viser hvor viktig det er å holde øye med hvordan A_n avhenger av *n*.

Fortsett gjerne med Fourier-rekka på kompleks form.