4. Tangentplan, tilvekstformel.

4.1. Tangentplanet.

Når vi studerer funksjoner av en variabel, er *tangenten* til funksjonsgrafen et nyttig hjelpemiddel. Når vi studerer funksjoner av to variable, er *tangentplanet* til funksjonsgrafen et like nyttig hjelpemiddel.

Men hva mener vi med *tangentplanet* til grafen til en funksjon av to variable? En innledende forklaring kan være slik: Gitt ei flate som er grafen til en funksjon $z = f(x, y)$ og et punkt P på denne flata. La A og B være to andre punkt på flata slik at P, A og B ikke ligger langs ei rett linje. Da vil disse tre punktene entydig definere et plan. La så A og B gå mot P mens de hele tiden ligger i flata. Det planet vi får når A og B faller sammen med P er da tangentplanet til flata i punktet P. Dersom funksjonen er kontinuerlig rundt P vil det ikke spille noen rolle hvilke retninger A og B beveger seg i når de nærmer seg P og faller sammen med P.

På grunnlag av beskrivelsen ovenfor kan vi finne likningen for tangentplanet til ei flate i et punkt P med koordinater (x_0, y_0, z_0) der $z_0 = f(x_0, y_0)$. Utledningen er dyttet ned i et vedlegg, men resultatet er:

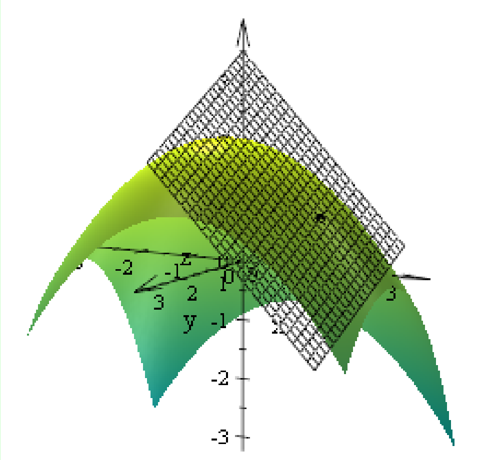
> Gitt en funksjon *f* som er kontinuerlig rundt et punkt
> $$\mathrm{P}\big(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)\big).$$
>
> Da er tangentplanet til funksjonsgrafen gitt ved
> $$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Her betyr $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ at du først finner den partielle deriverte og deretter setter inn verdiene for x_0 og y_0. Tilsvarende for $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$.

Eksempel 4.1: Finn tangentplanet til grafen til
$$z = f(x, y) = 2 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y^2$$
i punktet $(1, 2)$.

Løsning: Vi finner først *z*-verdien i punktet:
$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 2) = 2 - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 1 - \tfrac{1}{4}\cdot 2^2 = \underline{1}.$$
Videre blir
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = \left(-x + \tfrac{1}{2}\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = -1 + \tfrac{1}{2} = \underline{-\tfrac{1}{2}}$$
og

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = \left(-\tfrac{1}{2}y\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = -\tfrac{1}{2}\cdot 2 = \underline{-1}.$$



Da blir likningen til tangentplanet

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\cdot(x-1) - 1\cdot(y-2) = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} - y + 2 \\ &= \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}x - y + \tfrac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Til venstre ser du grafen til funksjonen sammen med tangentplanet (som er tegnet som et rutenett). Tangeringspunktet $(1,2,1)$ er også tegnet inn som en liten prikk.

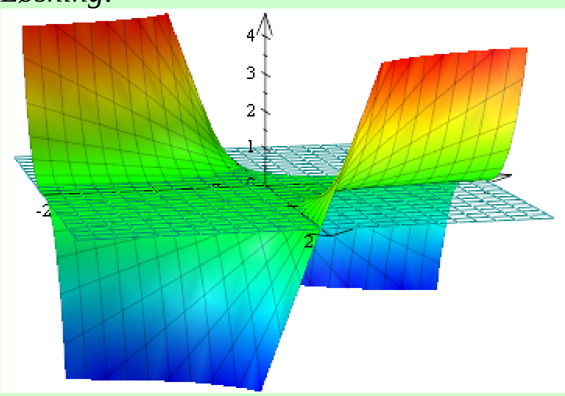
I eksemplet ovenfor oppførte tangentplanet seg slik vi forventer at et tangentplan skal oppføre seg: Det tangerte (berørte) graf-flata til *f* i *ett* punkt. Men det er ikke alltid slik. I eksemplet nedenfor ser du en annen situasjon:

Eksempel 4.2: Finn tangentplanet til grafen til

$$z = f(x,y) = x^3y$$

i punktet $(0,0)$.

Løsning:



Vi ser at i punktet $(0,0)$ er

$$z = 0\cdot 0^3 = \underline{0}.$$

Videre er

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 3x^2y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = x^3\cdot 1\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

slik at likningen for tangentplanet blir

$$z = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) = \underline{\underline{0}}.$$

Tangentplanet faller altså sammen med *xy*-planet. Dette er illustrert ovenfor, der du også ser at tangentplanet faller sammen med graf-flata til *f* ikke bare i origo men langs hele *y*-aksen, og at tangentplanet også skjærer gjennom graf-flata til *f*.

4.2. Tilvekstformelen.

Hvis vi er et sted på grafen til $z = f(x,y)$ nær tangeringspunktet $\mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$, vil grafen til *f* ligge nær tangentplanet. Et punkt *z* i tangentplanet gitt ved

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

vil da være en tilnærmet verdi for et punkt $z = f(x, y)$ på graf-flata.

For å markere at (x, y, z) ligger nær P, erstattes gjerne $x - x_0$ med Δx, og $y - y_0$ erstattes med Δy. La nå z være et punkt *på graf-flata til f*. Da er

$$z \approx z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y\,.$$

Setter vi videre $z - z_0 = \Delta z$, får vi:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Denne formelen kalles ofte *tilvekstformelen i to variable*.

Formelen er illustrert i en egen figur.

Slik formelen står i ramma ovenfor, forutsettes det at z er en funksjon av *to* variable x og y. Men formelen utvides lett til å gjelde for funksjoner av flere variable. Det er bare å legge til flere ledd av samme typen som de to leddene som allerede står på høyre side av likhetstegnet.

Eksempel 4.3**:** En rett sylinder har grunnflateradius $R = 10\,\text{cm}$ og høyde $h = 40\text{ cm}$. Finn et tilnærmet uttrykk for økingen i volum dersom radien øker med 0.1 cm samtidig som høyden avtar med 0.2 cm.

Løsning: Volumet til sylinderen er gitt ved

$$V(R,h) = \pi R^2 \cdot h\,.$$

Da blir:

$$\frac{\partial V(10,40)}{\partial R} = 2\pi Rh\Big|_{\substack{R=10\\h=40}} = 2\pi \cdot 10 \cdot 40 = \underline{800\pi}\,.$$

$$\frac{\partial V(10,40)}{\partial h} = \pi R^2\Big|_{\substack{R=10\\h=40}} = \pi \cdot 10^2 = \underline{100\pi}\,.$$

Tilvekstformelen gir nå

$$\Delta V \approx \frac{\partial V(10,40)}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V(10,40)}{\partial h} \cdot \Delta h = 800\pi \cdot 0.1 + 100\pi \cdot (-0.2) = \underline{\underline{60\pi}}$$

med benevning cm^3.

Vi kan kontrollere dette med å beregne svaret eksakt. Vi får

$$\Delta V = V(10.1, 39.8) - V(10,40) = \pi \cdot 10.1^2 \cdot 39.8 - \pi \cdot 10^2 \cdot 40$$

$$= 4059.998\pi - 4000\pi = \underline{59.998\pi}$$

Vi ser at unøyaktigheten neppe har praktisk betydning.

4.3. Totalt differensial. Noen derivasjonsformler.

Tilvekstformelen danner utgangspunkt for flere nyttige anvendelser. Vi skal nå frigjøre oss fra punktet (x_0, y_0) og skrive tilvekstformelen slik:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \ .$$

Så lar vi Δx, Δy og Δz bli så små størrelser at vi kan erstatte dem med de tilsvarende differensialene *dx*, *dy* og *dz*. Da får vi:

Gitt en funksjon $z = f(x, y)$.
Da er *det totale differensialet dz* for funksjonen gitt ved

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

Med utgangspunkt i denne setningen kan vi lage noen nyttige derivasjonsregler. Utledningene er ikke formelt helt uangripelige, men de får holde til våre formål.

Hittil har vi forutsatt at *x* og *y* kan variere uavhengig av hverandre. Men mange ganger er det en sammenheng mellom *x* og *y*. Dersom vi antar at *y* er en funksjon av *x*, kan vi dele det totale differensialet *dz* på *dx*. Da får vi:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Denne derivasjonsregelen kan vi kalle "kjerneregelen i to variable".

Den grafiske tolkingen av denne situasjonen er at vi må bevege oss langs en "sti" definert av sammenhengen mellom *x* og *y*. Da vil $\frac{dy}{dx}$ være stigningstallet til tangenten til ”stien” projisert ned i *x*-*y*-planet. Størrelsen $\frac{dz}{dx}$ blir da en tilnærmet verdi for hvor mye *z* vokser når *x* øker med en (svært liten) enhet når vi beveger oss langs denne ”stien”.

Eksempel 4.4: Vi har gitt funksjonen

$$z = f(x, y) = x^2 - xy - y^2 \ .$$

Dessuten er sammenhengen mellom *x* og *y* gitt ved:

$$y = 2x - 1 .$$

Finn $\frac{dz}{dx}$, og bruk resultatet til å finne maksimalverdien til *z* når $y = 2x - 1$.

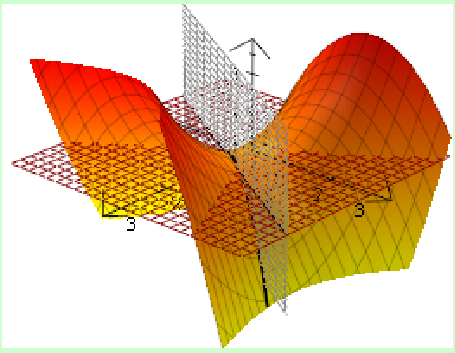
Løsning: Vi ser direkte at

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

slik at

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = (2x - y) + (-x - 2y) \cdot 2$$

$$= 2x - y - 2x - 4y = -5y = \underline{\underline{-5(2x-1)}}$$



På figuren ovenfor ser du grafen til *f* sammen med *xy*-planet og planet $y = 2x - 1$. Nå vil $\frac{dz}{dx}$ angi stigningstallet til skjæringslinja mellom dette siste planet og grafen til *f*.

Kontroll: Dersom vi setter inn for *y* før vi deriverer, får vi

$$z = x^2 - x(2x-1) - (2x-1)^2 = x^2 - 2x^2 + x - 4x^2 + 4x - 1 = \underline{-5x^2 + 5x - 1}.$$

Deriverer:

$$\frac{dz}{dx} = -10x + 5 = \underline{\underline{-5(2x-1)}}.$$

Vi har maksimum (eller minimum) når

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x^2 - xy - y^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 0 - 0^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}}}$$

Av grafen ser vi at dette punktet blir et lokalt maksimum på graf-flata når vi beveger oss langs linja gitt ved $y = 2x - 1$.

I eksemplet ovenfor støttet vi oss til grafen for å slå fast at punktet vi fant var et maksimums- og ikke et minimums-punkt. Vi skal snart ta en grundigere behandling av maksimums- og minimums-problemer, og skal da se hvordan vi på en sikrere måte kan skille mellom maksimums- og minimumspunkter.

Vi kan også anta at både *x* og *y* er funksjoner av en tredje variabel *t* (gjennom en parameter-framstilling). Da kan vi dele *dz* på *dt*, og får

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.}$$

Også her må vi bevege oss langs den "stien" som parameterframstillingen angir. Størrelsen $\frac{dz}{dt}$ er da en tilnærmet verdi for hvor mye *z* vokser når *t* øker med en (svært liten) enhet.

Eksempel 4.5: Vi har gitt funksjonen

$$z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2.$$

Anta at

$$x = \cos t \text{ og } y = \sin t.$$

Finn $\frac{dz}{dt}$, og bruk resultatet til å finne eventuelle maksimal- og minimalverdiverdier til z når $x = \cos t$ og $y = \sin t$.

Løsning:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = (2x - y)\cdot(-\sin t) + (-x + 2y)\cdot\cos t \\ &= (2\cos t - \sin t)(-\sin t) + (-\cos t + 2\sin t)\cdot\cos t \\ &= -2\sin t\cdot\cos t + \sin^2 t - \cos^2 t + 2\sin t\cdot\cos t \\ &= \underline{\underline{\sin^2 t - \cos^2 t}} = \underline{\underline{y^2 - x^2}}\end{aligned}$$

Også her kan vi kontrollere ved først å sette inn for t og deretter derivere:

$$z = x^2 - xy + y^2 = \cos^2 t - \cos t\cdot\sin t + \sin^2 t = \underline{1 - \cos t\cdot\sin t}.$$

$$\frac{dz}{dt} = 0 - (-\sin t\cdot\sin t + \cos t\cdot\cos t) = \underline{\underline{\sin^2 t - \cos^2 t}} = \underline{\underline{y^2 - x^2}}.$$

Vi har maksimum eller minimum når

$$\frac{dz}{dt} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y^2 - x^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = \underline{\pm x}.$$

Dersom $y = x$, blir

$$\sin t = \cos t \quad\Leftrightarrow\quad \tan t = 1 \quad\Leftrightarrow\quad t = \begin{cases}\frac{1}{4}\pi & \Leftrightarrow\quad x = y = \underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}} \\ \frac{5}{4}\pi & \Leftrightarrow\quad x = y = \underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\end{cases}$$

Da blir

$$z = x^2 - xy + y^2 = x^2 - x\cdot x + x^2 = \underline{x^2} = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}.$$

Dersom $y = -x$, blir

$$\sin t = -\cos t \quad\Leftrightarrow\quad \tan t = -1 \quad\Leftrightarrow\quad t = \begin{cases}-\frac{1}{4}\pi & \Leftrightarrow\quad x = -y = \underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}} \\ \frac{3}{4}\pi & \Leftrightarrow\quad x = -y = \underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\end{cases}$$

Da blir

$$z = x^2 - xy + y^2 = x^2 - x\cdot(-x) + (-x)^2 = \underline{3x^2} = 3\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}.$$

Siden f er kontinuerlig, får vi lokale maksima med verdi $z_{\max} = \frac{3}{2}$ i punktene $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ og $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, og lokale minima med verdi $z_{\min} = \frac{1}{2}$ i punktene $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ og $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Med utgangspunkt i formelen for det totale differensialet kan vi utlede en grei teknikk til å derivere implisitt gitte funksjoner. Dersom *y* er gitt implisitt som en funksjon av *x*, kan sammenhengen alltid skrives på formen

$$z = f(x, y) = \text{konstant}\,.$$

Men dette kan oppfattes som om vi beveger oss langs en *konturkurve* (eller en kotekurve) til funksjonen $z = f(x, y)$. Og langs en slik konturkurve er *z* konstant, slik at differensialet (tilveksten) $dz = 0$. Dette medfører at

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = -\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\,.$$

Men *dx* og *dy* er små endringer i henholdsvis *x*- og *y*-verdi når vi går langs konturkurven. Da blir $\frac{dy}{dx}$ lik stigningstallet til tangenten til grafen til konturkurven. Og dermed har vi fått en attraktiv metode til å finne *y'* til implisitt gitte funksjoner:

Anta at *y* er en implisitt gitt funksjon av *x*, gitt ved

$$z = f(x, y) = \text{konstant}\,.$$

Da er

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

***Eksempel 4.6*:** Finn *y'* når

$$x^2 - xy + y^2 = 4\,.$$

Løsning: Definer funksjonen

$$z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2 = 4\,.$$

Vi får at

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2x - y}{-x + 2y} = \underline{\underline{\frac{2x - y}{x - 2y}}}\,.$$

Som kontroll kan vi derivere implisitt på tradisjonell måte:

$$2x - (1\cdot y + x\cdot y') + 2y\cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - (x - 2y)y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = \frac{2x - y}{x - 2y}}}\,.$$

4.4. Gradient.

Helt til slutt skal vi definere begrepet *gradient*, som er en svært viktig størrelse i vektor-analyse. Vi tar igjen utgangspunkt i formelen for det totale differensialet for det tilfellet at vi går langs en konturkurve, slik at

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = 0$$

Men dette kan skrives på vektorform:

$$dz = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 0 .$$

Og nå definerer vi:

La *f* være en funksjon av to variable *x* og *y*.

Vektoren $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$ kalles *gradienten til f* og skrives ∇f .

Vi antar nå at en konturkurve er gitt ved

$$z = f(x, y) = \text{konstant} .$$

Da er

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 0 .$$

Men vi vet at skalarproduktet mellom to vektorer er lik null hvis og bare hvis vektorene står vinkelrett på hverandre. Altså har vi vist at gradienten ∇f står vinkelrett på vektoren $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$.

Men $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ er en tangentvektor til konturkurven. Da må ∇f står vinkelrett på konturkurven $z = f(x, y) = \text{konstant}$.

***Eksempel 4.7*:** Finn gradienten til sirkelen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 9 .$$

Løsning:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} = \underline{\underline{2\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}} .$$

Figuren til høyre viser at vektoren $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ står vinkelrett på tangenten til sirkelbuen i et vilkårlig punkt på sirkelen.