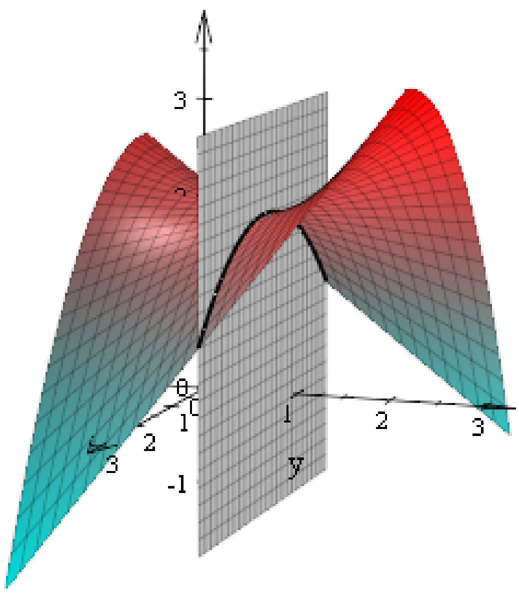
3. Partielle deriverte.

3.1. Definisjoner.

Vi har tidligere sett at det kan være nyttig å skjære grafen til en funksjon $f(x,y)$ med plan parallelle med *x*-*y*-planet, slik at vi får konturkurver. Men det er enda nyttigere å skjære disse grafene med vertikale plan parallelle med henholdsvis *y*-*z*-planet og *x*-*z*-planet. De skjærings-linjene som da framkommer, danner grunnlaget for *partielle deriverte*.



Figuren til venstre viser et utsnitt av grafen til funksjonen

$$z = f(x,y) = 2 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{4}y\ .$$

Denne grafen blir ei krum flate. Denne flata skjæres av planet

$$y = 1\ .$$

Dermed får vi ei skjæringslinje. Ved å undersøke hvordan denne skjæringslinja ser ut, kan vi finne ut hvordan grafen (flata) til *f* ser ut når $y = 1$.

På samme måte kan vi skjære grafen til *f* med andre plan som har konstant *y*-verdi. Da får vi nye skjæringslinjer, som vi kan undersøke. Slike undersøkelser skjer enklest ved at vi deriverer, og oppfatter *y* som en konstant under derivasjonen.

Slike derivasjoner, der vi deriverer en funksjon av to variable mens vi oppfatter en av de variable som en konstant, kaller vi *partiell derivasjon*.

Gitt en funksjon $f(x,y)$ som er kontinuerlig i en omegn rundt (x,y).
Da er de **partielle deriverte av *f*** definert slik:

Den **partielle deriverte av *f* med hensyn på *x*** er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

(merk at *y* oppfattes som en konstant).

Den **partielle deriverte av *f* med hensyn på *y*** er

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

(merk at *x* oppfattes som en konstant).

Dersom vi har en funksjon av mer enn to variable, kan kun *en* variabel endre seg om gangen mens de andre variablene holdes konstant.

***Eksempel 3.1*:** Finn de partielle deriverte til disse funksjonene:

a) $z = f(x,y) = 2x^2 - xy + 3y^2$

b) $z = f(x,y) = 2x \cdot e^y - y \cdot \ln x$

Løsning:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 2x - 1 \cdot y + 0 = \underline{\underline{4x - y}}$

(husk at *y* oppfattes som en konstant).

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 - x \cdot 1 + 3 \cdot 2y = \underline{\underline{-x + 6y}}$

(husk at *x* oppfattes som en konstant).

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot e^y - y \cdot \dfrac{1}{x} = \underline{\underline{2e^y - \dfrac{y}{x}}}$

(husk at *y* oppfattes som en konstant).

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x \cdot e^y - 1 \cdot \ln x = \underline{\underline{2xe^y - \ln x}}$

(husk at *x* oppfattes som en konstant).

Vi bruker kjerneregelen på vanlig måte, slik de neste eksemplene viser:

***Eksempel 3.2*:** Finn de partielle deriverte av disse funksjonene:

a) $z = f(x,y) = e^{xy^2}$.

b) $z = f(x,y) = x \cdot \sin(x + y^2)$.

c) $z = y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

Løsning:

a) Setter

$z = f(x,y) = e^{xy^2} = e^u$ der $u = xy^2$.

Da blir

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^u \cdot (1 \cdot y^2) = \underline{\underline{y^2 \cdot e^{xy^2}}}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = e^u \cdot (x \cdot 2y) = \underline{\underline{2xy \cdot e^{xy^2}}}$.

b) Setter

$z = x \cdot \sin(x + y^2) = x \cdot \sin u$ der $u = x + y^2$.

Da blir

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \sin u + x \cdot \cos u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin u + x \cdot \cos u \cdot (1 + 0) = \underline{\underline{\sin(x + y^2) + x \cdot \cos(x + y^2)}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \cos u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \cos u \cdot (0 + 2y) = \underline{\underline{2xy \cdot \cos(x + y^2)}}.$$

c) Setter $z = y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = y \cdot \sqrt{u} = y \cdot u^{\frac{1}{2}}$ der $u = x^2 + y^2$.
Da blir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (2x + 0) = \underline{\underline{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot \sqrt{u} + y \cdot \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{u} + y \cdot \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (0 + 2y) = \frac{u + y^2}{\sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}}.$$

3.2. Høyere ordens partielle deriverte.

Når vi først har definert de partielle deriverte, er det naturlig å gå videre og definere høyere ordens partielle deriverte.

Vi kan ta utgangspunkt i $\frac{\partial f}{\partial x}$ og derivere en gang til:

Når vi deriverer $\frac{\partial f}{\partial x}$ på nytt med hensyn på *x*, får vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Når vi deriverer $\frac{\partial f}{\partial x}$ på nytt med hensyn på *y*, får vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Eller vi kan ta utgangspunkt i $\frac{\partial f}{\partial y}$ og derivere en gang til, både med hensyn på *x* og med hensyn på *y*. Da får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Dette er faktisk mye enklere enn det ser ut til, noe neste eksempel viser:

***Eksempel 3.3*:** Finn de 2. ordens partielle deriverte til

$$z = f(x, y) = x^3 - 2x^2 y + xy^2.$$

Løsning: Vi starter med å finne de 1. ordens deriverte:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2 \cdot 2x \cdot y + 1 \cdot y^2 = \underline{3x^2 - 4xy + y^2}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 2x^2 \cdot 1 + x \cdot 2y = \underline{-2x^2 + 2xy}.$$

Så deriverer vi på nytt. Først deriveres $\frac{\partial z}{\partial x}$ på nytt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 4xy + y^2\right) = 3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 \cdot y + 0 = \underline{\underline{6x - 4y}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 4xy + y^2\right) = 0 - 4x \cdot 1 + 2y = \underline{\underline{-4x + 2y}}.$$

Så deriveres $\frac{\partial z}{\partial y}$ på nytt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2 + 2xy\right) = -2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot y = \underline{\underline{-4x + 2y}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2x^2 + 2xy\right) = 0 + 2x \cdot 1 = \underline{\underline{2x}}.$$

Legg merke til at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ blir like. Dette er ikke noen tilfeldighet. Vi kan nemlig vise at for alle de "pene" funksjonene som vi får med å gjøre, er $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Det kan riktignok konstrueres sære funksjoner der dette ikke holder, men slike funksjoner vil du neppe komme i kontakt med i praksis.

Nå som du kan derivasjonsteknikken, er det på tide å se hva dette kan brukes til. Her er et par bruksområder:

- Tangentplan, som kan brukes til overraskende mange ting.
- Optimering (beregning av maksimums- og minimumsverdier).