6. Optimering uten begrensninger.

Vi skal nå ta for oss følgende problem:

Finn eventuelle lokale maksimums- og minimumspunkter for en funksjon $f(x,y)$, når x og y kan ha alle reelle verdier.

Først trenger vi en definisjon:

Et punkt (x_0, y_0) er et *stasjonært punkt for funksjonen* $f(x,y)$

$\Updownarrow$ def.

både $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ er lik null i punktet (x_0, y_0).

Med andre ord:

Vi finner et stasjonært punkt for $f(x,y)$ ved å løse likningssettet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

***Eksempel 6.1*: ** Finn eventuelle stasjonære punkter for funksjonen

$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{3}x^3 y - xy .$$

Løsning: Finner først de partielle deriverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y - y \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{3}x^3 - x .$$

Setter begge disse deriverte lik null:

$$x^2 y - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \qquad (1)$$

$$\tfrac{1}{3}x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\tfrac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3} \qquad (2)$$

Nå må vi kombinere løsninger:

Løsningen $y = 0$ fra (1) kan kombineres med alle x-verdiene fra (2). Men løsningene $x = \pm 1$ fra (1) passer ikke inn i (2), og kan altså ikke brukes. Vi får altså disse stasjonære punktene:

$$\underline{\underline{(0,0)}}, \qquad \underline{\underline{\left(\sqrt{3},0\right)}}, \text{ og } \underline{\underline{\left(-\sqrt{3},0\right)}}.$$

Endelig kommer vi til poenget:

> Dersom (x_0, y_0) er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for en funksjon $f(x,y)$, så er enten (x_0, y_0) et stasjonært punkt for *f*, eller (x_0, y_0) er et punkt der de partielle deriverte av *f* ikke eksisterer.

En kort begrunnelse: Anta at (x_0, y_0) er et maksimums- eller minimumspunkt, og at *f* har partielle deriverte i punktet (det vil si at grafen til *f* er "glatt" i punktet). Se for deg at du legger et tangentplan i et slikt optimumspunkt. Da må jo dette tangentplanet bli horisontalt. Og normalvektoren til tangentplanet blir parallell med *z*-aksen. Men vi har tidligere funnet at en normalvektor til tangentplanet er gitt ved

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Skal denne normalvektoren være parallell med *z*-aksen, må begge de partielle deriverte av *f* være lik null i (x_0, y_0).

Men denne testen svikter dersom de partielle deriverte ikke eksisterer i punktet (d.v.s. at grafen til *f* ikke er kontinuerlig i punktet, eller at det er en "knekk" på grafen). Slike punkter *kan* også være optimumspunkter for funksjonen.

Setningen ovenfor gir oss altså mulige *kandidater* til optimumspunkter. Men hvordan kan vi skille mellom maksimums- og minimumspunkter?

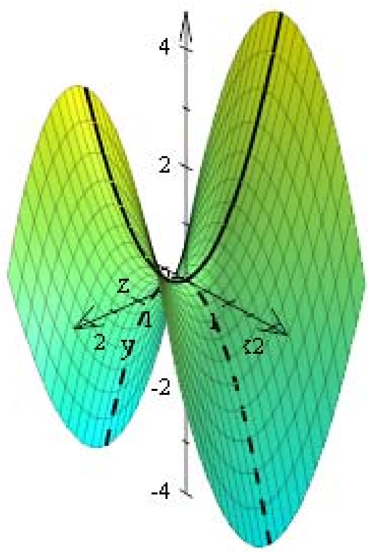
Og kan vi være sikre på at stasjonære punkter eller punkter der de partielle deriverte ikke eksisterer virkelig er optimumspunkter? Dette problemet kan vi illustrere med funksjonen

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2.$$

De partielle deriverte blir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

slik at *f* har et stasjonært punkt i $(0,0)$.



Men se på grafen til funksjonen, som er avbildet til høyre. Grafen får et *minimums*punkt dersom vi går forbi det stasjonære punktet i *x*-retning (markert med heltrukket linje), og et *maksimums*punkt dersom vi går i *y*-retning (markert med stiplet linje).

Slike punkter kaller vi (naturlig nok) *sadelpunkt*.

Vi har heldigvis en test som kan brukes til å skille mellom maksimsums- minimums- og sadelpunkt for stasjonære punkter. Denne testen kalles ***andrederivert-testen***.

(*Andrederivert-testen*):
La (x_0, y_0) være et stasjonært punkt for en funksjon *f* som er to ganger deriverbar.
Definer

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}, \quad \Delta = A \cdot C - B^2.$$

Da gjelder:

- Dersom $\Delta > 0$ og $A > 0$, er (x_0, y_0) et lokalt minimumspunkt.
- Dersom $\Delta > 0$ og $A < 0$, er (x_0, y_0) et lokalt maksimumspunkt.
- Dersom $\Delta < 0$, er (x_0, y_0) et sadelpunkt.
- Dersom $\Delta = 0$, gir testen ingen avgjørelse.

Du finner et litt uformelt bevis for påstandene i testen i et vedlegg.

***Eksempel 6.2*:** Finn og klassifiser eventuelle stasjonære punkter til funksjonen
$$z = f(x, y) = \tfrac{1}{3}x^3 - xy + \tfrac{1}{2}xy^2$$

Løsning: De partielle deriverte blir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - y + \tfrac{1}{2}y^2 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + xy.$$

Likningssettet for å finne stasjonære punkter blir:

$$x^2 - y + \tfrac{1}{2}y^2 = 0 \qquad (1)$$
$$-x + xy = 0 \iff x(-1 + y) = 0 \iff x = 0 \vee y = 1 \qquad (2)$$

Setter verdiene fra (2) inn i (1):
$x = 0$: (1) blir nå
$$-y + \tfrac{1}{2}y^2 = 0 \iff y\left(-1 + \tfrac{1}{2}y\right) = 0 \iff y = 0 \vee y = 2$$
$y = 1$: (1) blir nå
$$x^2 - 1 + \tfrac{1}{2} = 0 \iff x^2 = \tfrac{1}{2} \iff x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
De stasjonære punktene blir: $\underline{(0,0)}$, $\underline{(0,2)}$, $\underline{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)}$, og $\underline{\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)}$.

Finner de andrederiverte for å klassifisere punktene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 + y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x.$$

Lager en tabell for å systematisere undersøkelsen:

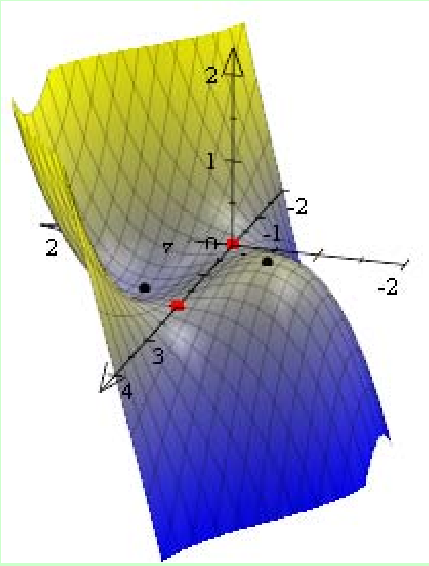
Punkt	$A = 2x$	$B = -1 + y$	$C = x$	$\Delta = A \cdot C - B^2$	Type
$(0,0)$	0	-1	0	-1	Sadel
$(0,2)$	0	1	0	-1	Sadel
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	Minimum
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$	$-\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	Maksimum

Nå kan vi finne minimums- og maksimumsverdiene:

Minimum:
$$z_{\min} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{6} - 1 + \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \underline{-\tfrac{1}{3\sqrt{2}}}$$

Maksimum:
$$z_{\text{maks}} = \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{6} - 1 + \tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\tfrac{1}{3\sqrt{2}}}$$

Begge disse punktene er *lokale* ekstremalpunkter. Det er ikke vanskelig å finne funksjonsverdier som er mye mindre enn $z_{\min}$, og mye større enn z_{maks}. Bare se hva som skjer dersom du setter $y = 0$ og lar $x \to \pm\infty$.



Grafen til funksjonen er vist ovenfor til høyre. De stasjonære punktene er også avmerket.

Til slutt kan vi se et eksempel der de partielle deriverte ikke eksisterer:

***Eksempel 6.3*:** Finn eventuelle ekstremalpunkter for funksjonen
$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Løsning: Vi setter
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \qquad \text{der} \qquad u = x^2 + y^2\ .$$
Da blir
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Setter vi disse partielle deriverte lik null, får vi etter tur $x = 0$ og $y = 0$. Men setter vi punktet $(0,0)$ inn i uttrykkene for de deriverte, får vi "$\frac{0}{0}$"-uttrykk. Vi undersøker denne grenseverdien nærmere ved å sette $y = k \cdot x$ og deretter la $x \to 0$. Da får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+(k\cdot x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{1+k^2}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}$$

og

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\sqrt{x^2+(k\cdot x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{k\cdot x}{x\sqrt{1+k^2}}=\underline{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\,.$$

Vi ser at grenseverdiene for disse deriverte vil avhenge av verdien av *k* når vi nærmer oss punktet $(0,0)$. Altså eksisterer ikke disse partielle deriverte i dette punktet.

Men samtidig vil dette punktet gi oss et minimumspunkt. Det ser vi fordi *z* aldri kan være negativ. Den minste verdien *z* kan ha, er $z=0$, og den verdien får *z* i punktet $(0,0)$. Altså har *f* et globalt minimum der hvor de partielle deriverte ikke eksisterer.

Grafen til *f* blir en rett kjegle med spissen ned, slik figuren til høyre viser. Dette kan du forresten innse uten å tegne grafen. Vi får skjæring med *xz*-planet når $y=0$. Da er

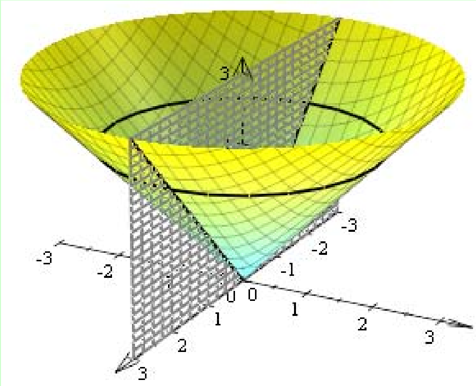
$$z=\sqrt{x^2+0^2}=\pm x$$

der vi må bruke pluss når $x>0$ og minus når $x<0$. På samme måte blir skjæringslinja med *yz*-planet

$$z=\pm y\,.$$

Dessuten blir nivåkurvene sirkler med radius *z*:

$$z^2=x^2+y^2\,.$$



Skjæringen med *xz*-planet og nivåkurven (sirkelen) $x^2+y^2=2^2$ er også tegnet inn.