7. Optimering under bibetingelse.

7.1. Innledning.

I denne forbindelse er en *bibetingelse* en "sti" som vi må følge mens vi beveger oss på grafen til en funksjon $z = f(x,y)$. Slike bibetingelser skrives gjerne på formen

$$g(x,y) = c$$

der c er en konstant. Bibetingelsen kan oppfattes som en implisitt gitt funksjon, og grafen til denne funksjonen i x-y-planet kan oppfattes som projeksjonen av "stien" ned i x-y-planet. Noen eksempler på slike bibetingelser:

***Eksempel 7.1*:** Hvilke linjer i x-y-planet framstilles av disse bibetingelsene:

a) $g(x,y) = 2x - y = 4$

b) $g(x,y) = x^2 - y^2 = 0$

c) $g(x,y) = x^2 - 6x + 4y^2 = 7$

Løsning:

a) Løser ut y, og får den rette linja $y = 2x - 4$.

b) $x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = x \quad \vee \quad y = -x$.
Vi får altså to rette linjer.

c) Legger til 9 på begge sider av likhetstegnet, og får

$$x^2 - 6x + 9 + 4y^2 = 7 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + 4y^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Dette er en ellipse med sentrum i $(3,0)$ og halvakser $a = 4$ og $b = 2$.

Vi har tre metoder til disposisjon for å løse slike optimeringsproblem:

1. **Innsettingsmetoden**. Denne metoden går ut på at vi løser ut x (eller y) fra bibetingelsen og setter inn i $z = f(x,y)$. Da omformes denne funksjonen til en funksjon av *en* variabel. Og slike funksjoner er vi vant med å optimere.

Dersom innsettingsmetoden gir stygge regninger, eller når det ikke er mulig å løse ut x eller y av bibetingelsen, tyr vi til en av metodene nedenfor:

2. **Metoden med parallelle tangenter**. Her benytter vi at i et optimumspunkt vil grafen til bibetingelsen tangere en kotekurve. Dette gir oss en likning som sammen med bibetingelsen gir to likninger som vi kan løse x og y fra. Metoden gir kun *kandidater* for maksimal- eller minimalpunkter, og lar oss ikke avgjøre om de punktene vi finner virkelig er maksimal- eller minimalpunkter.

3. **Lagranges metode.** Denne metoden kan oppfattes som en generalisering av metoden med parallelle tangenter. Ved første øyekast virker denne metoden tungvint, bl.a. fordi vi må

innføre en ekstra ukjent størrelse. Men metoden gir en del ekstra informasjon som kan være nyttig spesielt i økonomiske anvendelser. Metoden kan også greit generaliseres til funksjoner av mer enn to variable og flere bibetingelser.

La oss gå gjennom metodene etter tur.

7.2. Innsettingsmetoden.

Vi illustrerer denne metoden med et eksempel:

***Eksempel 7.2*:** Optimer funksjonen

$$z = f(x,y) = -x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 + 4$$

under bibetingelsen

$$g(x,y) = 2x + y = 4 .$$

Løsning: Av bibetingelsen får vi

$$y = 4 - 2x$$

som settes inn i den funksjonen som skal optimeres. Vi får

$$z = -x^2 - \tfrac{1}{4}(4-2x)^2 + 4 = -x^2 - \tfrac{1}{4}\left(16 - 16x + 4x^2\right) + 4 = -x^2 - 4 + 4x - x^2 + 4$$

$$= \underline{-2x^2 + 4x}$$

Vi deriverer for å finne maksimum eller minimum:

$$\frac{dz}{dx} = -4x + 4$$

Settes dette lik null, får vi

$$-4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{1} .$$

Da er

$$y = 4 - 2x = 4 - 2 \cdot 1 = \underline{2} .$$

Dette må være et maksimalpunkt fordi

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -4 < 0 .$$

Maksimalverdien blir

$$z_{\text{maks}} = -1^2 - \tfrac{1}{4} \cdot 2^2 + 4 = \underline{\underline{2}} .$$

Situasjonen er illustrert til høyre, der du ser et utsnitt av grafen til

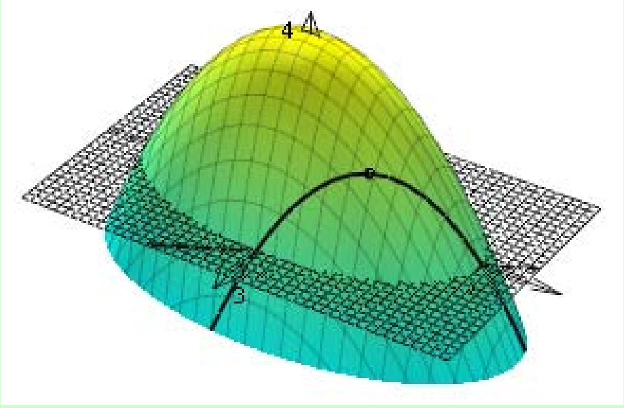
$$z = f(x,y) = -x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 + 4$$

med bibetingelsen

$$y = 4 - 2x$$

tegnet inn over grafen til *f*.

Maksimalpunktet $(1,2,2)$ er også tegnet inn.



I eksemplet satte vi først inn for *y*, og deretter deriverte vi med hensyn på *x*. Men vi kan også gjøre det i omvendt rekkefølge: Deriver først, sett inn etterpå. Da bruker vi kjerneregelen i to variable:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

der $\frac{dy}{dx}$ skal beregnes fra bibetingelsen.

I eksemplet får vi

$$\frac{df}{dx} = -2x - \tfrac{1}{4} \cdot 2y \cdot (-2) = -2x + y = -2x + (4 - 2x) = \underline{-4x + 4},$$

samme resultat som da vi satte inn først og deriverte etterpå.

7.3. Metoden med parallelle tangenter.

Problemet er som før at vi skal optimere $z = f(x, y)$ samtidig som vi har en bibetingelse $g(x, y) = c$. Vi tar utgangspunkt i kjerneregelen for en funksjon av to variable:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Her skal $\frac{dy}{dx}$ beregnes fra bibetingelsen. Men dersom bibetingelsen er "stygg", kan det bli grisete regninger på denne måten. Vi finner da $\frac{dy}{dx}$ ved hjelp av partielle deriverte:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

Altså er

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

Nå viser det seg i praksis at vi som regel får $\frac{df}{dx}$ uttrykt ved *både x* og *y*. I prinsippet kan vi eliminere den ene ukjente ved hjelp av bibetingelsen, men i praksis kan dette være vanskelig. Vi velger da nest beste strategi, og benytter at når vi har et optimalpunkt er $\frac{df}{dx} = 0$. Altså setter vi

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

Sammen med bibetingelsen har vi nå to likninger som vi kan løse *x* og *y* ut av. Da får vi *kandidater* til mulige optimalpunkter.

I sammendrag:

Vi finner kandidater til optimalpunkter for funksjonen

$$z = f(x,y)$$

under bibetingelsen

$$g(x,y) = c$$

ved å sette opp likningen

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

og løse den sammen med bibetingelsen.

Metoden har fått sitt navn ut fra en geometrisk tolking. Når vi er på høyeste (eller laveste) punkt langs bibetingelsen, vil grafen til bibetingelsen tangere en konturkurve. Altså må tangentene til bibetingelsen og til konturkurven falle sammen. Vi har allerede sett at

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

er stigningstallet til tangenten til grafen til bibetingelsen $g(x,y) = c$. En konturkurve er gitt ved $z = f(x,y) = z_0$, slik at

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

kan oppfattes som stigningstallet til tangenten til en slik konturkurve. Settes disse to uttrykkene lik hverandre, får vi likningen i ramma ovenfor.

Metoden forutsetter egentlig at både $\frac{\partial f}{\partial y}$ og $\frac{\partial g}{\partial y}$ er forskjellige fra null. Men vi kan også få løsning dersom begge disse nevnerne er lik null samtidig. Grafisk betyr det at begge tangentene har uendelig stort stigningstall, d.v.s. at de er parallelle med *y*-aksen. Dessuten kan vi ha løsning dersom en eller begge brøkene er "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, der grenseverdien er slik at likningen er oppfylt. Verdier av *x* og *y* som gir slike situasjoner, bør undersøkes spesielt.

***Eksempel 7.3*:** Optimer funksjonen

$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}y$$

under bibetingelsen

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20\,.$$

Løsning: Der er ikke særlig fristende å prøve å finne x eller y av bibetingelsen. Vi bruker isteden metoden med parallelle tangenter:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{2x-2}{2y-4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{x-1}{y-2} \quad \Leftrightarrow \quad y-2 = \tfrac{4}{3}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y = \tfrac{4}{3}x + \tfrac{2}{3}}.$$

Her må vi forutsette at $y \neq 2$. Dette settes inn i bibetingelsen:

$$x^2 + \left(\tfrac{4}{3}x + \tfrac{2}{3}\right)^2 - 2x - 4\left(\tfrac{4}{3}x + \tfrac{2}{3}\right) = 20$$

$$x^2 + \tfrac{16}{9}x^2 + \tfrac{16}{9}x + \tfrac{4}{9} - 2x - \tfrac{16}{3}x - \tfrac{8}{3} = 20$$

Multipliserer med 9 og trekker sammen:

$$25x^2 - 50x - 200 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

Løsningene blir

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

med disse y-verdiene:

$$\underline{x = 4} \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{4}{3} \cdot 4 + \tfrac{2}{3} = \underline{6}.$$

$$\underline{x = -2} \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{4}{3} \cdot (-2) + \tfrac{2}{3} = \underline{-2}.$$

Setter inn for å se hva som er maks. og hva som er min.:

$$f(4,6) = \tfrac{1}{4} \cdot 4 + \tfrac{1}{3} \cdot 6 = \underline{3}.$$

$$f(-2,-2) = \tfrac{1}{4} \cdot (-2) + \tfrac{1}{3} \cdot (-2) = \underline{-\tfrac{7}{6}}.$$

Til slutt ser vi nærmere på tilfellet $y = 2$. Men likningen

$$\tfrac{3}{4} = \frac{x-1}{y-2}$$

kan kun være oppfylt dersom $x = 1$ samtidig som $y = 2$ slik at venstre side blir et "$\tfrac{0}{0}$-uttrykk som går mot $\tfrac{3}{4}$ som grense. Men punktet $(1,2)$ passer ikke inn i bibetingelsen (prøv!).

Vi sammenlikner disse kandidatene, og finner at:

- Funksjonen har maksimumspunkt i $(4,6)$ med maksimumsverdi 3.
- Funksjonen har minimumspunkt i $(-2,-2)$ med minimumsverdi $-\tfrac{7}{6}$.

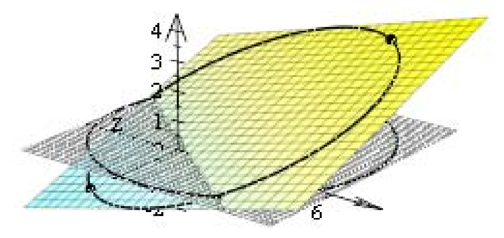
For å vise situasjonen grafisk, starter vi med å omforme bibetingelsen:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 20 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Bibetingelsen er altså en sirkel med radius 5 og sentrum i punktet $(1,2)$.



Grafen til funksjonen f som skal optimeres, blir et plan. Figuren til høyre ovenfor viser planet og bibetingelsen. Maksimums- og minimumspunktene er også avmerket.

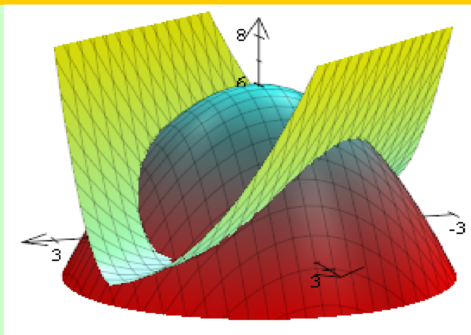
***Eksempel 7.4*:** Finn høyeste og laveste punkt på skjæringslinjen mellom grafene til de to funksjonene

$$z_1 = f_1(x,y) = (x-y)^2$$

og

$$z_2 = f_2(x,y) = 6 - x^2 - y^2 .$$

Løsning: Vi ser at $z_1 = 0$ når $y = x$. Ellers er $z_1 > 0$. Grafen til f_1 blir derfor en "u-dal" med "dalbunn" i retningen $y = x$. Grafen til f_2 blir en omdreiningsparaboloide med *z*-aksen som akse og topp-punkt i $z = 6$ når $x = y = 0$. Figuren til høyre viser situasjonen.



Vi finner skjæringslinjen mellom grafene ved å sette $z_1 = z_2$. Da får vi

$$(x-y)^2 = 6 - x^2 - y^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 2xy + y^2 = 6 - x^2 - y^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2 - 2xy + 2y^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow\quad g(x,y) = x^2 - xy + y^2 = 3$$

Vi kan nå velge om vi vil optimere f_1 eller f_2 under denne bibetingelsen. Det ser ut som om partiell derivasjon av f_2 gir penest regninger, så vi velger å optimere den:

$$\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2x}{-2y} = \frac{2x-y}{-x+2y} \quad\Leftrightarrow\quad x(-x+2y) = y(2x-y)$$

$$\Leftrightarrow\quad -x^2 + 2xy = 2xy - y^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = y^2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{y = \pm x}$$

Så settes disse to verdiene inn i bibetingelsen etter tur:

$$y = x: \qquad g(x,x) = x^2 - x\cdot x + x^2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = \pm\sqrt{3}}.$$

Dette gir punktene $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ og $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

$$y = -x: \qquad g(x,-x) = x^2 - x\cdot(-x) + (-x)^2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = \pm 1}.$$

Dette gir punktene $(1,-1)$ og $(-1,1)$.

Vi har nå 4 kandidater til optimumspunkt, og vi må undersøke dem etter tur:

$$f_2(\sqrt{3},\sqrt{3}) = 6 - \sqrt{3}^2 - \sqrt{3}^2 = \underline{0}.$$

$$f_2(-\sqrt{3},-\sqrt{3}) = 6 - (-\sqrt{3})^2 - (-\sqrt{3})^2 = \underline{0}.$$

$$f_2(1,-1) = 6 - 1^2 - (-1)^2 = \underline{4}.$$

$$f_2(-1,1) = 6 - (-1)^2 - 1^2 = \underline{4}.$$

Under disse regningene har vi forutsatt at $y \neq 0$ og at $x \neq 2y$ for å unngå null i nevner. Vi bør derfor undersøke disse punktene spesielt, og ser på den likningen der de aktuelle brøkene forekom:

$$\frac{-2x}{-2y} = \frac{2x-y}{-x+2y}.$$

Dersom vi setter $y = 0$ inn i bibetingelsen, får vi $x^2 - x\cdot 0 + 0^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \pm\sqrt{3}}$.

Men likningen ovenfor er åpenbart ikke oppfylt for tallparene $\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$.

Setter vi $x = 2y$ (og forutsetter at $y \neq 0$) inn i likningen ovenfor, får vi ved forkorting at

$$\frac{-2\cdot 2y}{-2y} = \frac{2\cdot 2y - y}{-2y+2y} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{3}{0}$$

som åpenbart er umulig.

Vi samler trådene, og finner at:

- Punktene $(1,-1)$ og $(-1,1)$ er begge maksimalpunkter med maksimalverdi $z = 4$.
- Punktene $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ og $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ er begge minimalpunkter med minimalverdi $z = 0$.

7.4. Lagranges metode.

Dette er en optimeringsteknikk som kan virke litt kronglete. Den gir kandidater til optimalpunkter, uten muligheter for å skille mellom maksimal- og minimalpunkter. Jeg skal nøye meg med å sette opp "oppskriften" uten å forsøke å begrunne eller bevise at den virker:

Lagranges metode for å løse problemet:
Optimer $z = f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = c$.

Definer *Lagrange-funksjonen*

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda\cdot g(x,y)$$

der konstanten λ kalles *Lagrange-multiplikatoren*.

Sett opp likningene $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ og $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$.

Sammen med bibetingelsen har du nå tre likninger som du kan løse x, y og λ av.

La oss se hvordan dette fungerer i praksis:

***Eksempel 7.5*:** Bruk Lagranges metode til å optimere funksjonen

$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}y$$

under bibetingelsen

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20.$$

(Dette er samme problem som i eks. 7.3).

Løsning: Vi danner Lagrange-funksjonen

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 2x - 4y\right)$$

Finner de partielle deriverte, og setter dem lik null:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \tfrac{1}{4} - 2\lambda x + 2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda(x-1) = \tfrac{1}{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \tfrac{1}{3} - 2\lambda y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda(y-2) = \tfrac{1}{3}$$

Deler disse likningene på hverandre (må forutsette at $y \neq 2$), og får

$$\frac{2\lambda(x-1)}{2\lambda(y-2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{y-2} = \tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y-2 = \tfrac{4}{3}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{4}{3}x + \tfrac{2}{3}\,.$$

Nå kan denne sammenhengen settes inn i bibetingelsen. De videre regningene blir da de samme som i eksempel 7.3.

Det er i grunnen ikke så merkelig at Lagranges metode fører til nesten de samme regningene som metoden med parallelle tangenter. Se bare her:

Siden $L(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$, får vi

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

Så deles disse to likningene på hverandre, og vi får

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

som vi jo kjenner fra før.

Hva er så hensikten med å bruke Lagranges metode? Tilsynelatende kompliseres regningene ved at vi innfører en ekstra ukjent λ. Det er i alle fall tre gode grunner til å bruke Lagranges metode:

1. I mange tilfeller kan vi slippe problemer med null i nevner der hvor metoden med parallelle tangenter gir slike spesialtilfeller.

2. Lagranges metode kan lett generaliseres til funksjoner med mer enn to ukjente og mer enn en bibetingelse (se eksemplet nedenfor).

3. Lagrange-multiplikatoren λ kan gi oss nyttig informasjon. Vi kan nemlig vise at dersom f_m er en maksimums- eller minimums-verdi for f under bibetingelsen $g(x,y) = c$, så er

$$\frac{df_\mathrm{m}}{dc} = \lambda\,.$$

Dette betyr at dersom c øker med en (infinitesimal) enhet, vil λ angi hvor mye f_m da vil øke med.

I eksempel 7.3 og 7.5 kan bibetingelsen omformes til en sirkel med radius $\sqrt{c}$. Da vil λ kunne brukes til å beregne hvor mye maksimums- og minimums-verdiene vil endres ved en (infinitesimal) endring av sirkelens radius.

Vi skal nå se hvordan Lagranges metode kan brukes til å optimere en funksjon av tre variable under to bibetingelser:

***Eksempel 7.5*:** Optimer funksjonen

$$z = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsene

$$g_1(x, y, z) = x - y = 0 \quad \text{og} \quad g_2(x, y, z) = x + y - z = 3.$$

Løsning: Vi setter opp Lagrange-funksjonen med to Lagrange-multiplikatorer:

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= f(x, y, z) - \lambda_1 \cdot g(x, y, z) - \lambda_2 \cdot g_2(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x - y) - \lambda_2(x + y - z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_2 = 0$$

Sammen med bibetingelsene har vi nå 5 likninger med 5 ukjente. Dette likningssettet kan løses for eksempel med Gauss-eliminasjon. Resultatet blir:

$$\underline{\underline{x = 1}}, \quad \underline{\underline{y = 1}}, \quad \underline{\underline{z = -1}}.$$

Videre blir $\lambda_2 = -2$ og $\lambda_1 = 0$.

Den tilhørende funksjonsverdien blir da

$$z = f(1, 1, -1) = 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = \underline{\underline{3}}.$$

Vi kan vise at dette er en minimumsverdi.