8. Optimering over et begrenset område.

Vi skal nå se på den mest sammensatte situasjonen: Vi skal optimere en funksjon $z = f(x, y)$ som er definert over et begrenset område. Vi kan da finne optimalpunktene følgende steder:

1. I stasjonære punkter innenfor definisjonsområdet.
2. I punkter innenfor definisjonsområdet der de partielle deriverte ikke eksisterer.
3. Langs grensen for definisjonsområdet.

Før vi går i gang for alvor, trenger vi en definisjon og en setning om eksistens av optimal-punkter. Definisjonen først:

Et område *D* er **lukket**

$\Updownarrow$ def.

D er avgrenset av en lukket kurve,
og alle punktene på denne avgrensningskurven tilhører *D*.

Et par eksempler vi forhåpentlig klargjøre denne definisjonen:

***Eksempel 8.1*:** Avgjør om disse områdene er lukket:

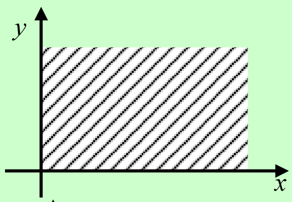
a) $D_a = \{(x, y) | x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0\}$

b) $D_b = \{(x, y) | x > 0 \quad \wedge \quad y > 0 \quad \wedge \quad x + y \leq 4\}$

c) $D_c = \{(x, y) | x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$

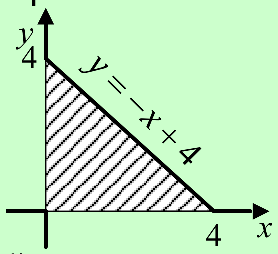
Løsning:

a)



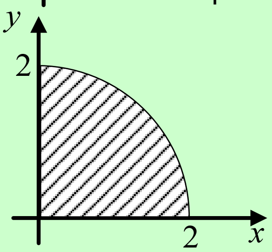
D_a består av hele 1. kvadrant i koordinatsystemet. Dette området er ikke avgrenset av en *lukket* kurve. Følgelig er ikke D_a lukket.

b)



D_b består av den delen av 1. kvadrant som ligger nedenfor eller på den rette linja $y = -x + 4$. Sammen med koordinataksene avgrenses området av en lukket kurve. Men koordinataksene er ikke selv med i området. Følgelig er ikke D_b lukket.

c)



D_c består av den delen av 1. kvadrant som ligger innenfor eller på sirkelen $x^2 + y^2 = 2^2$. Sammen med koordinataksene avgrenses området av en lukket kurve. Alle punkter på denne avgrensningskurven er selv med i området. Altså er D_c lukket.

Og så til setningen, som vi ikke skal bevise:

La $z = f(x, y)$ være definert overalt innenfor et lukket område.
Da har *f* både en maksimumsverdi og en minimumsverdi.

Setningen *garanterer* altså at når *f* tilfredsstiller betingelsene, har den alltid både maksimums- og minimumsverdi. Men funksjonen *kan* ha maksimums- og/eller minimumsverdi selv om betingelsene ikke er oppfylt.

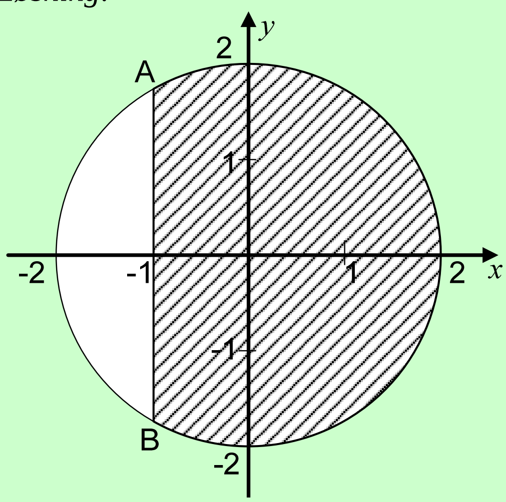
La oss se hvordan dette fungerer i praksis:

***Eksempel 8.2*:** Optimer funksjonen

$$z = f(x, y) = \tfrac{1}{3}x^3 y$$

når $x^2 + y^2 \le 4$ og $x \ge -1$.

Løsning:



Vi starter med å tegne opp definisjonsområdet, som avgrenses av sirkelen $x^2 + y^2 = 2^2$ og den rette linja $x = -1$. Definisjonsområdet blir derfor området innenfor sirkelen til høyre for linja $x = -1$. Dette er et lukket område siden avgrensningskurven er med i definisjonsområdet. Altså har *f* både maksimum og minimum.

Vi må finne "hjørnepunktene" A og B. Vi setter $x = -1$ inn i sirkel-likningen, og får

$$(-1)^2 + y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{3}$$

slik at A får koordinatene $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ mens B får koordinatene $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$.

Så finner vi eventuelle stasjonære punkter *innenfor* definisjonsområdet:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{3}x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Vi ser at alle punkter der $x = 0$ passer inn i begge likningene, slik at alle punkter på *y*-aksen der $-2 \le y \le 2$ er stasjonære punkt. Det er ikke nødvendig å undersøke hvilken type punkt dette er, fordi vi senere må sammenlikne funksjonsverdien med andre funksjonsverdier. Vi ser direkte at funksjonsverdien i disse punktene blir

$$z = f(0, y) = \tfrac{1}{3} \cdot 0^3 \cdot y = 0.$$

Så leter vi etter eventuelle ekstremalpunkter langs avgrensningskurven. Vi starter langs den rette linja AB. Der er $x = -1$, slik at innsettingsmetoden ser grei ut:

$$z = f(-1, y) = \tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 y = -\tfrac{1}{3} y \,.$$

Vi ser uten videre regning at langs denne linja er *z* størst når *y* er minst, og omvendt. Største *z*-verdi blir da $z = -\frac{1}{3} y = -\frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ i B, og minste *z*-verdi blir $z = -\frac{1}{3} y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ i A.

Så leter vi langs sirkelen. Der ser innsettingsmetoden *ikke* grei ut. Vi bruker heller metoden med parallelle tangenter, idet vi betrakter sirkelen som en bibetingelse:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 4 \,.$$

Vi må også sørge for å holde oss innenfor området $-1 \le x \le 2$.

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 y}{\frac{1}{3} x^3} = \frac{2x}{2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3y}{x} = \frac{x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 = x^2$$

Vi må forutsette at $x \ne 0$ og at $y \ne 0$. Men dersom vi setter verdiene $x = 0$ eller $y = 0$ inn i bibetingelsen (sirkel-likningen), får vi punkter som åpenbart ikke passer i likningen ovenfor.

Så setter vi $x^2 = 3y^2$ inn i sirkel-likningen ("bibetingelsen"), og får:

$$3y^2 + y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1$$

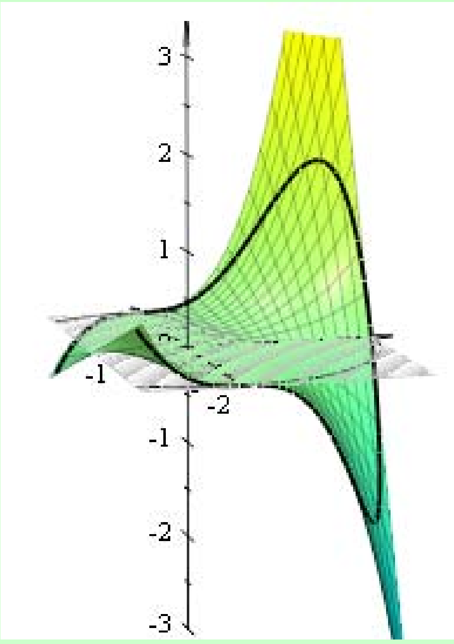
som videre gir

$$x^2 = 3y^2 = 3 \cdot (\pm 1)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \,.$$

Her er det bare verdien $x = +\sqrt{3}$ som ligger innenfor definisjonsområdet. Vi får altså to nye kandidater til maksimum/minimum:

$\left(\sqrt{3}, 1\right)$ med funksjonsverdi $z = f\left(\sqrt{3}, 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot 1 = \sqrt{3}$.

$\left(\sqrt{3}, -1\right)$ med funksjonsverdi $z = f\left(\sqrt{3}, -1\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot (-1) = -\sqrt{3}$.



Nå sammenlikner vi funksjonsverdiene i de 5 kandidat-punktene vi har funnet:

$$z = f(0, y) = 0^3 \cdot y = 0$$

$$z = f\left(-1, \sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 \cdot \sqrt{3} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$z = f\left(-1, -\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 \cdot \left(-\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$z = f\left(\sqrt{3}, 1\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot 1 = \sqrt{3}$$

$$z = f\left(\sqrt{3}, -1\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot (-1) = -\sqrt{3}$$

Og da ser vi at:

$z_{maks} = \sqrt{3}$ i punktet $\left(\sqrt{3}, 1\right)$.

$z_{min} = -\sqrt{3}$ i punktet $\left(\sqrt{3}, -1\right)$.

Når du jobber med slike oppgaver, kan det lønne seg å merke av "kandidat-punkter" på grafen etter hvert som du finner slike punkter, og gjerne skrive ned funksjonsverdiene ved punktene. Da blir det lettere å holde oversikten slik neste eksempel viser.

Eksempel 8.3: Optimer funksjonen

$$z = f(x,y) = y - \tfrac{1}{4}x^2y - \tfrac{1}{3}y^3$$

under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 \le 3\,.$$

Løsning: Vi merker oss først at $x^2 + y^2 = 3$ blir en sirkel med radius $R = \sqrt{3}$ og sentrum i origo. Vi skal altså gå på jakt etter maksimums- og minimumspunkter innenfor eller på denne sirkelen. Siden definisjonsområdet er lukket, er vi sikre på at det må finnes både maksimums- og minimumspunkt.

Vi starter med å finne eventuelle stasjonære punkt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{-\tfrac{1}{2}xy}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \tfrac{1}{4}x^2 - y^2\,.$$

Vi ser direkte at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x = 0} \quad\vee\quad \underline{y = 0}\,.$$

Dersom $x = 0$, får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 - y^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - y^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = \underline{\pm 1}\,.$$

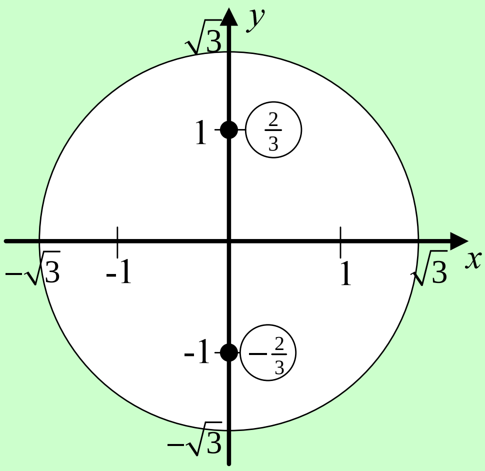
Dersom $y = 0$, får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - \tfrac{1}{4}\cdot x^2 - 0^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4 - x^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \underline{\pm 2}\,.$$

Men de to stasjonære punktene $(2,0)$ og $(-2,0)$ kan ikke brukes fordi

$$x^2 + y^2 = (\pm 2)^2 + 0^2 = 4$$

i strid med bibetingelsen.



Vi har derfor to kandidater til optimalpunkter: $(0,\pm 1)$. Vi regner ut funksjonsverdiene:

I punktet $(0,1)$ er

$$z = f(0,1) = 1 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 \cdot 1 - \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 = \underline{\tfrac{2}{3}}\,.$$

I punktet $(0,-1)$ er

$$z = f(0,-1) = -1 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^2\cdot(-1) - \tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3 = \underline{-\tfrac{2}{3}}\,.$$

På figuren til venstre er bibetingelsen tegnet inn sammen med de to kandidatene til maksimum / minimum, med funksjonsverdiene innringet.

Så går vi på jakt etter eventuelle ekstremalpunkter langs bibetingelsen, og benytter da metoden med parallelle tangenter:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\frac{1}{2}xy}{1-\frac{1}{4}x^2-y^2} = \frac{2x}{2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2xy}{4-x^2-4y^2} = \frac{x}{y}.$$

En mulig løsning er $x = 0$. Settes dette inn i bibetingelsen, får vi

$$0^2 + y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{3}.$$

Funksjonsverdiene blir i begge tilfellene

$$z = f\left(0, \pm\sqrt{3}\right) = \pm\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 \cdot 3 - \tfrac{1}{3}\cdot\left(\pm\sqrt{3}\right)^3 = \underline{0}.$$

Dersom $x \neq 0$ kan vi forkorte bort *x*, og får

$$\frac{-2y}{4-x^2-4y^2} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad -2y^2 = 4 - x^2 - 4y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 4.$$

Vi trekker fra bibetingelsen, og står igjen med

$$y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \underline{\pm 1}.$$

Da blir

$$x^2 + (\pm 1)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\pm\sqrt{2}}.$$

Vi har nå fått 4 nye kandidater, som vi må sette inn i funksjonsuttrykket. For å forenkle regningene, ser vi at $x^2 = 2$ i alle disse punktene slik at

$$z = f\left(\pm\sqrt{2}, y\right) = y - \tfrac{1}{4}\cdot 2^2 \cdot y - \tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{6}y\left(3 - 2y^2\right) = \tfrac{1}{6}y\left(3 - 2\cdot(-1)^2\right) = \tfrac{1}{6}y$$

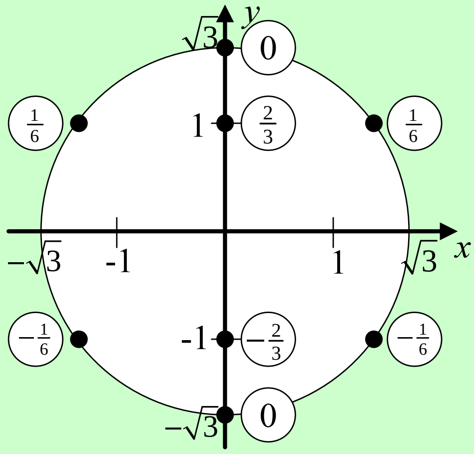
i alle punktene. Da får vi at

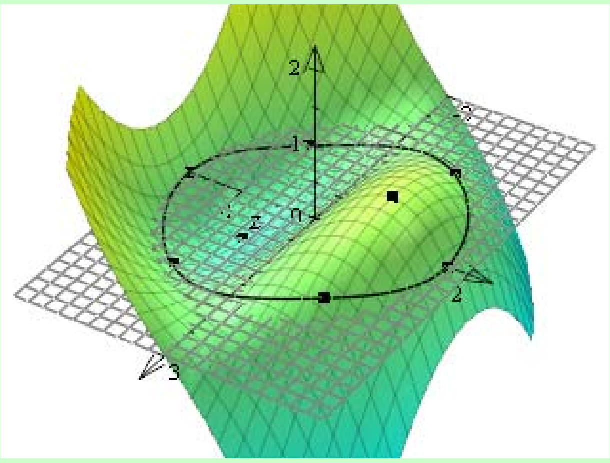
$$z = f\left(\pm\sqrt{2}, 1\right) = \tfrac{1}{6}\cdot 1 = \underline{\tfrac{1}{6}},$$

$$z = f\left(\pm\sqrt{2}, -1\right) = \tfrac{1}{6}\cdot(-1) = \underline{-\tfrac{1}{6}}.$$

Ved hjelp av figuren nedenfor til venstre der alle kandidatene til optimumspunkter et tegnet inn sammen med sine funksjonsverdier innringet, ser vi:

$$z_{\max} = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}} \text{ i punktet } \underline{\underline{(0,1)}}, \text{ og at} \quad z_{\min} = \underline{\underline{-\tfrac{2}{3}}} \text{ i punktet } \underline{\underline{(0,-1)}}.$$





Funksjonsgrafen med bibetingelsen og mulige optimumspunkter er skissert ovenfor til høyre.