1.1. Innledning.

Hittil har all funksjonslære dreid seg om funksjoner av *en* variabel. Men i praksis kommer du ofte bort i funksjoner av flere variabler. Et par eksempler:

- Volumet V til en sylinder med radius R og høyde h er gitt ved $V = \pi R^2 h$, og er derfor en funksjon av de to variablene R og h. Vi kan skrive $V = f\left(R, h\right) = \pi R^2 h$.

- Trykket p i en gass som inneholder N molekyler, har volum V og temperatur T, er $p = \dfrac{NkT}{V}$ der k er Boltzmanns konstant. Trykket er derfor en funksjon av de tre variablene N, V, og T. Vi kan skrive $p = g\left(N, V, T\right) = \dfrac{NkT}{V}$.

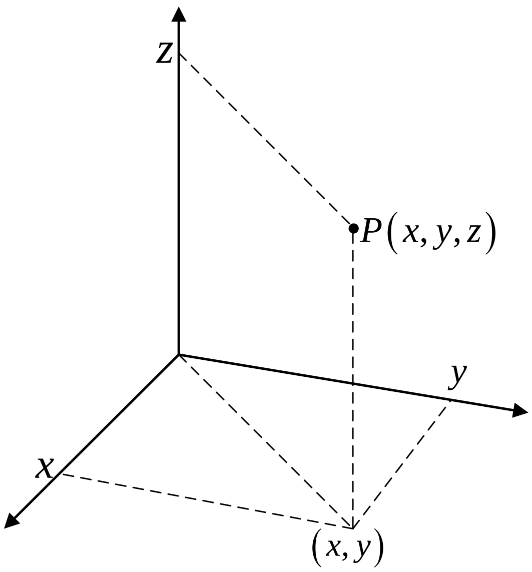
Vi skal i all hovedsak konsentrere oss om funksjoner av *to* variable. Men de fleste av de resultatene vi kommer fram til, kan enkelt generaliseres til funksjoner av flere variable.

Først et par definisjoner:

> En funksjon f av to variable x og y er en forskrift som til ethvert mulig tallpar $\left(x, y\right)$ tilordner ett og kun ett tall $z = f(x, y)$.
>
> Mengden D_f av mulige tallpar $\left(x, y\right)$ kalles *definisjonsmengden til f.*
>
> Mengden $V_f = \left\{z \mid z = f(x, y) \wedge \left(x, y\right) \in D_f\right\}$ kalles *verdimengden til f.*
>
> Mengden $G_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \wedge (x, y) \in D_f\}$ kalles *grafen til f.*

Denne definisjonen kan generaliseres til en funksjon av n variable:

> En funksjon f av n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en forskrift som til ethvert mulig tallsett $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tilordner ett og kun ett tall $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
>
> Mengden D_f av mulige tallsett $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kalles *definisjonsmengden til f.*
>
> Mengden $V_f = \{z \mid z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \wedge (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D_f\}$ kalles *verdimengden til f.*
>
> Mengden $V_f = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, z) \mid z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \wedge (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D_f\}$ kalles *grafen til f.*



Vi trenger et tre-dimensjonalt koordinat-system for å illustrere en funksjon av to variable. Definisjonsmengden D_f blir da et område i *x*-*y*-planet. For hvert tallpar $(x, y) \in D_f$ beregnes en *z*-verdi, som angis som en avstand fra *x*-*y*-planet. Grafen til *f* blir da mengden av punkt $P(x, y, z)$. Denne punktmengden utgjør ei *flate* i rommet.

I praksis kan det være vanskelig å se for seg hvordan grafen til en funksjon av to variable ser ut. Grafen blir jo ei flate i rommet, og vi er ikke vant til å se slike tredimensjonale flater foran oss. Vi skal etter hvert utvikle hjelpemidler som skal gi oss et inntrykk av hvordan slike grafer ser ut.

Det er ikke mulig å visualisere funksjoner av mer enn to variable på noen enkel måte.

1.2. Hvordan ser funksjonsgrafen ut?

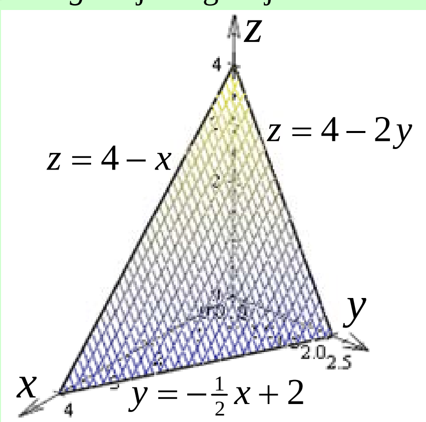
Grafen til en funksjon av to variable er altså ei flate i rommet. Men hvordan ser denne flata ut? Vi skal nå utvikle noen teknikker som hjelper oss til å "se" denne flata.

Det første (og ofte enkleste) hjelpemiddelet er å bestemme *skjæringskurvene med koordinat-planene*. Dette gjøres slik:

- Du finner skjæringslinja med *x*-*z*-planet ved å sette $y = 0$.
- Du finner skjæringslinja med *y*-*z*-planet ved å sette $x = 0$.
- Du finner skjæringslinja med *x*-*y*-planet ved å sette $z = f(x, y) = 0$.

***Eksempel 1.1*:** Gitt en funksjon $z = f(x, y) = 4 - x - 2y$. Finn skjæringslinjene mellom grafen og koordinatplanene, og tegn dem inn i et koordinatsystem.

Løsning: Skjæringslinjene finnes slik:



Setter $y = 0$ for å finne skjæring med *x*-*z*-planet:

$$z = 4 - x - 2 \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{z = 4 - x}.$$

Setter $x = 0$ for å finne skjæring med *y*-*z*-planet:

$$z = 4 - 0 - 2y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{z = 4 - 2y}.$$

Setter $z = 0$ for å finne skjæring med *x*-*y*-planet:

$$0 = 4 - x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y = -\tfrac{1}{2}x + 2}.$$

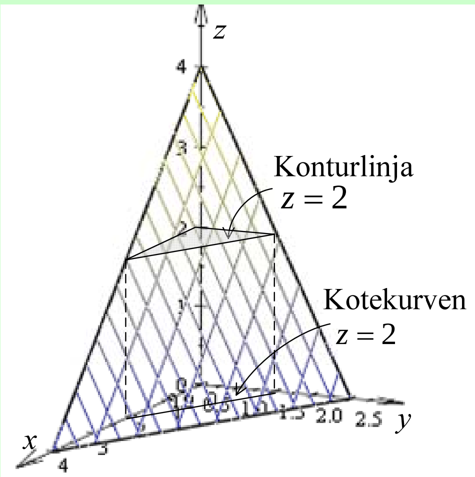
Til venstre ser du et tre-dimensjonalt koordinatsystem der planet $z = 4 - x - 2y$ er tegnet inn sammen med de tre skjæringslinjene.

Vi kan skaffe oss bedre oversikt over hvordan grafen ser ut ved å lage skjæringslinjer med andre plan som er parallelle med koordinatplanene. Vi skal starte med å skjære funksjons-grafen med plan som er parallelle med *x*-*y*-planet i avstand *c* over dette planet. De kurvene som da framkommer, kalles *konturkurver* (også kalt *nivåkurver*). Vi definerer:

Gitt en funksjon $z = f(x,y)$ og en konstant *c*.
Konturkurven til *f* i avstand *c* fra *x*-*y*-planet er da kurven gitt ved
$$z = f(x,y) = c\,.$$

Dersom denne kurven projiseres ned i *x*-*y*-planet, får vi en *kotekurve*.

Eksempel 1.2: Gitt en funksjon $z = f(x,y) = 4 - x - 2y$ (se Eksempel 1.1).
Bestem konturkurven og kotekurven for $z = 2$. Hvordan blir grafen til funksjonen?



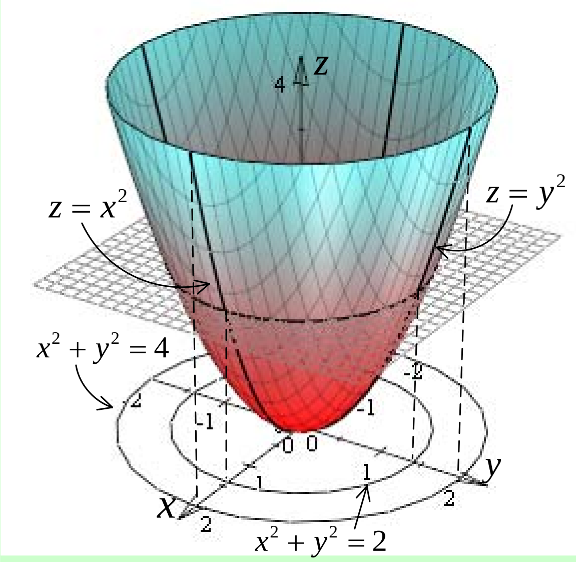
Løsning: Likningen for konturlinja blir
$$4 - x - 2y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{1}{2}x + 1.$$
Når denne linja projiseres ned i *x*-*y*-planet, får vi kotekurven.

Grafen til denne funksjonen blir et plan i rommet (se figuren til venstre).

Eksempel 1.3: Gitt funksjonen $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.
a) Bestem skjæringslinjene med koordinatplanene.
b) Bestem konturkurvene for $z = 2$ og for $z = 4$.
c) Hvordan blir grafen til funksjonen?

Løsning:
a) Skjæring med *x*-*z*-planet: $z = x^2 + 0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{z = x^2}$.
Skjæring med *y*-*z*-planet: $z = 0^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{z = y^2}$.
Skjæring med *x*-*y*-planet: $0 = x^2 + y^2$ som kun har løsningen $x = 0 \quad y = 0$.

b) Konturkurvene blir:
$x^2 + y^2 = 2$ som er en sirkel med sentrum i origo og radius $\sqrt{2}$.
$x^2 + y^2 = 4$ som er en sirkel med sentrum i origo og radius 2.



c) Grafen er skissert til venstre, sammen med kotekurver for $z = 2$ og for $z = 4$. Skjæringsplanet $z = 2$ er også tegnet inn.

d) Grafen blir en omdreinings-paraboloide med *z*-aksen som rotasjonsakse.

Når du skal analysere funksjoner av *en* variabel, er *derivasjon* et uunnværlig hjelpemiddel. Når vi har flere variable, skal vi derivere på en slik måte at kun en variabel får endres om gangen. Da snakker vi om *partielle deriverte*. Men før du går løs på det temaet, må du en tur innom *grenseverdier og kontinuitet* for funksjoner av flere variable.