2. Grenseverdi og kontinuitet.

Vi definerer grenseverdi for en funksjon av to variable på samme måte som for en funksjon av en variabel:

La f være en funksjon av to variable x og y. Da går f mot en grense L når $(x,y)\to(x_0,y_0)$ hvis og bare hvis det for ethvert tall $\varepsilon>0$ fins en sirkel med radius $\delta>0$ og sentrum i (x_0,y_0), slik at $\left|f(x,y)-L\right|\le\varepsilon$ for alle (x,y) som ligger innenfor snittet av sirkelen og funksjonens definisjonsmengde.

Vi skriver $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$.

Denne definisjonen er temmelig kronglete. Jeg skal prøve å forklare den: Se for deg ei flate i rommet. Denne flata er grafen til funksjonen *f*. Legg inn to parallelle plan i avstand $L-\varepsilon$ og $L+\varepsilon$ over *x*-*y*-planet. Disse to planene vil skjære ut en bit av graf-flata til *f*. Og nå er kravet at uansett hvor nær disse to planene ligger hverandre, skal det være mulig å slå en sirkel rundt punktet (x_0,y_0) slik at alle funksjonsverdier til punkter innenfor denne sirkelen skal ligge mellom de to planene. Hvis dette er mulig, så går *f* mot *L* som grense når $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Formuleringen "…snittet av sirkelen og funksjonens definisjonsmengde" er tatt med for å være sikker på at vi holder oss innenfor definisjonsmengden.

Denne definisjonen er temmelig kronglete å bruke i praksis. Men på grunnlag av den kan vi utlede grenseverdi-formler som er helt analoge til de formlene som vi kjenner for funksjoner av en variabel:

Anta at

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

og

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=B.$$

Da gjelder:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y)\right)=a\cdot A+b\cdot B$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(f(x,y)\cdot g(x,y)\right)=A\cdot B$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B}\quad\text{dersom } B\ne 0$$

Når vi skal finne grenseverdier i praksis, starter vi gjerne på samme måte som for funksjoner av en variabel: Vi bruker direkte innsetting som i eksemplet nedenfor:

***Eksempel 2.1*:** Finn $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{3x^2-y}{2xy}$.

Løsning: $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{3x^2-y}{2xy} = \dfrac{3\cdot 2^2-1}{2\cdot 2\cdot 1} = \underline{\underline{\dfrac{11}{4}}}$.

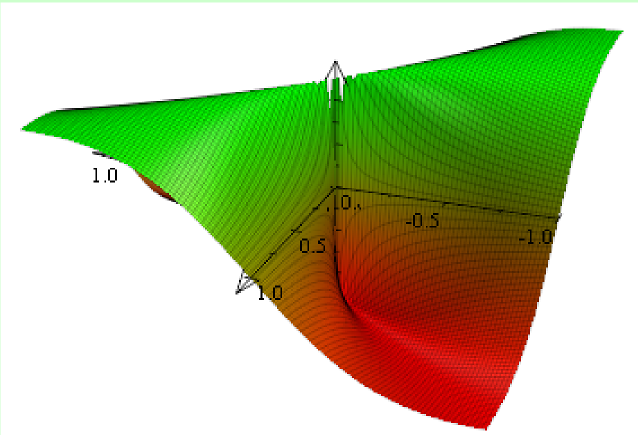
Vi kan få problemer dersom vi får "$\frac{0}{0}$ -uttrykk", eller "$\frac{\infty}{\infty}$ -uttrykk". Og nå har vi (som regel) ikke L'Hôpitals regel til disposisjon. Men noen ganger kan vi berge oss med den teknikken som er vist i neste eksempel.

Eksempel 2.2: Finn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Løsning: Direkte innsetting gir et "$\frac{0}{0}$ -uttrykk". Vi prøver derfor å nærme oss punktet $(0,0)$ lang rette linjer av typen $y = k\cdot x$. Dersom vi nå finner en grenseverdi, og denne grenseverdien er uavhengig av *k*, har vi også funnet den søkte grenseverdien. Men se hva som skjer her når vi setter inn $y = k\cdot x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(k\cdot x)}{x^2+(k\cdot x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k\cdot x^2}{(1+k^2)\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \underline{\frac{k}{1+k^2}}.$$

Vi ser at grenseverdien avhenger av *k*, d.v.s. at grenseverdien avhenger av i hvilken retning vi går inn mot punktet $(0,0)$. Dette betyr at det ikke eksisterer noen veldefinert grenseverdi i punktet $(0,0)$.



Grafen til funksjonen er vist til venstre. Hvis den grafiske gjengivelsen er bra, kan du se hvordan funksjonsverdien avhenger av hvilken retning du har inn mot punktet $(0,0)$. Altså eksisterer ikke grenseverdien for funksjonen i punktet $(0,0)$.

Nå som vi har definert grenseverdi, kan vi gå videre og definere *kontinuitet*:

En funksjon *f* er kontinuerlig i et punkt $\left(x_0, y_0\right)$ dersom disse betingelsene er oppfylt:

- Funksjonen er definert i punktet $\left(x_0, y_0\right)$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right)$ eksisterer.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right) = f\left(x_0,y_0\right)$

Og videre:

En funksjon *f* er kontinuerlig i et område dersom *f* er kontinuerlig for alle punkter i området.

I praksis koker dette ned til at polynomfunksjoner, eksponential- og logaritmefunksjoner, trigonometriske funksjoner osv., samt sammensatte funksjoner av disse, er kontinuerlige overalt innen sine definisjonsområder, unntatt i punkter der nevneren blir null mens telleren er forskjellig fra null

Funksjonen fra Eksempel 2. 2 er derfor kontinuerlig overalt unntatt i punktet $\left(0,0\right)$.

Nå er alt klart til å gå løs på *partielle deriverte*.