Dobbeltintegral.

Vi har tidligere beregnet volum av visse typer romlegemer ved å tenke oss at vi snitter opp legemet i tynne skiver, og summere (d.v.s. integrere) volumene av disse skivene. Dette forutsetter imidlertid at skivene har en "pen" form. Nå skal vi gå et skritt videre, og beregne volum av romlegemer der skivene ikke trenger å ha så pen form.

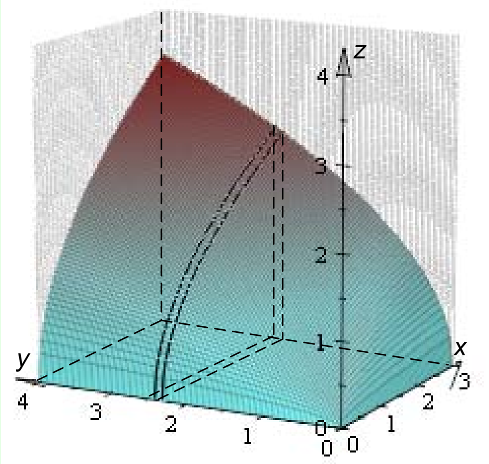
Vi skal starte med å gå gjennom et eksempel for å belyse prinsippene, før vi behandler problemet mer prinsipielt.

Eksempel 1: Beregn volumet av det romlegemet som avgrenses av grafen til funksjonen

$$f(x,y)=\sqrt{xy}\ ,$$

planet $z=0$ (d.v.s. *x*-*y*-planet), og planene $x=3$ og $y=4$.

Løsning:



På figuren til venstre ser du grafen til

$$f(x,y)=\sqrt{xy}$$

sammen med planene $x=3$ og $y=4$. Jeg har også snittet ut ei *tynn* skive vinkelrett på *y*-aksen. Arealet av snittflata beregnes med et vanlig integral, der vi må huske på at *y* er konstant langs hele snittflata. Det er klart at arealet av snittflata avhenger av hvor vi legger snittet, slik at jeg kaller arealet i avstand *y* fra *x*-*z*-planet for $A(y)$. Da blir

$$A(y)=\int_{x=0}^{x=3}\sqrt{xy}\,dx=\sqrt{y}\cdot\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}dx=\sqrt{y}\cdot\left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$=\tfrac{2}{3}\sqrt{y}\left(3^{\frac{3}{2}}-0\right)=\tfrac{2}{3}\sqrt{y}\cdot 3\sqrt{3}=\underline{2\sqrt{3}\sqrt{y}}$$

Tykkelsen av skiva er Δy. Da blir volumet av skiva

$$\Delta V\approx A(y)\cdot\Delta y\ .$$

Volumet av hele legemet blir da

$$V\approx\sum_{y=0}^{y=4}\Delta V=\sum_{y=0}^{y=4}A(y)\cdot\Delta y\ .$$

På vanlig måte lar vi nå $\Delta y\to 0$ samtidig som antall skiver går mot uendelig. Tilnærmingen blir bedre og bedre jo tynnere skivene blir, samtidig som vi kan erstatte summen med et integral:

$$V=\int_{y=0}^{y=4}A(y)\,dy=\int_0^4 2\sqrt{3}\sqrt{y}\,dy=2\sqrt{3}\int_0^4 y^{\frac{1}{2}}dy=2\sqrt{3}\cdot\left[\tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\tfrac{4}{3}\sqrt{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)=\tfrac{4}{3}\sqrt{3}\cdot 2^3=\underline{\underline{\tfrac{32}{3}\sqrt{3}}}$$

Vi summerer opp de operasjonene vi har utført:

$$V=\int_{y=0}^{y=4}A(y)\,dy=\int_{y=0}^{y=4}\left(\int_{x=0}^{x=3}\sqrt{xy}\,dx\right)dy=\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=3}\sqrt{xy}\,dx\,dy\ .$$

Som kontroll kan vi jo legge snittene vinkelrett på x-aksen, og se om vi får samme resultat. Ei snittflate i avstand x fra y-z-planet får areal

$$A(x)=\int_{y=0}^{y=4}\sqrt{xy}\,dy=\sqrt{x}\int_0^4 y^{\frac{1}{2}}dy=\sqrt{x}\cdot\left[\tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\tfrac{2}{3}\sqrt{x}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)=\tfrac{2}{3}\sqrt{x}\cdot 8=\underline{\tfrac{16}{3}\sqrt{x}}\,.$$

Her har vi benyttet at x er konstant langs snittflata. Volumet av legemet blir da

$$V=\int_{x=0}^{x=3}A(x)\,dx=\int_0^3\tfrac{16}{3}\sqrt{x}dx=\tfrac{16}{3}\cdot\left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\tfrac{32}{9}\left(3^{\frac{3}{2}}-0\right)=\tfrac{32}{9}\cdot 3\sqrt{3}=\underline{\underline{\tfrac{32}{3}\sqrt{3}}}$$

som før.

Også her kan vi summere opp operasjonene:

$$V=\int_{x=0}^{x=3}A(x)\,dx=\int_{x=0}^{x=3}\left(\int_{y=0}^{y=4}\sqrt{xy}\,dy\right)dx=\int_{x=0}^{x=3}\int_{y=0}^{y=4}\sqrt{xy}\,dy\,dx\,.$$

Som ventet får vi samme resultat uansett hvordan vi legger snittene. Dette åpner for en mer generell skrivemåte:

$$V=\iint_R\sqrt{xy}\,dA$$

der $dA=dx\cdot dy$ er et lite areal-element i x-y-planet, mens R er et rektangel definert ved $0\le x\le 3$, $0\le y\le 4$. Vi avgjør selv hvordan vi vil legge snittene.

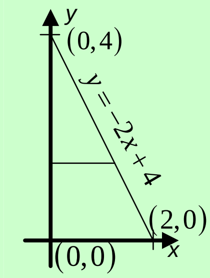
Ved hjelp av denne skrivemåten skal vi gå løs på litt vanskeligere problemer.

Eksempel 2: Beregn

$$\iint_R x^2y\,dA$$

der R er en trekant med hjørner $(0,0)$, $(2,0)$ og $(0,4)$.

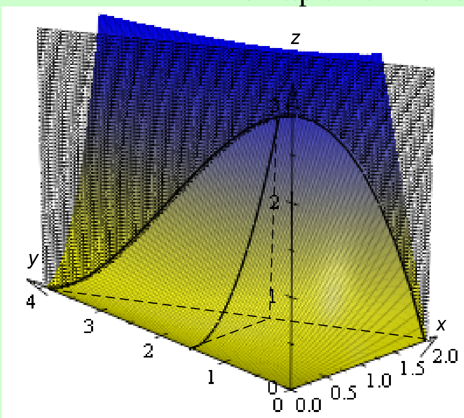
Løsning:



La oss først se på området R, som er tegnet inn til venstre. Vi ser av figuren at R avgrenses av linjene $x=0$, $y=0$ og $y=-2x+4$. Ei snittlinje med konstant y-verdi er også tegnet inn. Denne snittlinja strekker seg fra $x=0$ til den skjærer linja

$$y=-2x+4 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\tfrac{1}{2}y+2\,.$$

På figuren nedenfor ser du grafen til $f(x,y)=x^2y$, sammen med et plan vinkelrett på x-y-planet som skjærer x-y-planet langs linja $y=-2x+4$. Et snittplan vinkelrett på y-aksen er også tegnet inn.



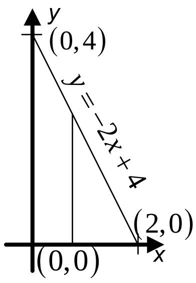
Nå kan vi beregne dobbeltintegralet slik:

$$\iint_R x^2y\,dA=\int_{y=0}^{y=4}\left(\int_{x=0}^{x=-\frac{1}{2}y+2}x^2y\,dx\right)dy\,.$$

Det innerste integralet gir oss arealet av snittflata. Her integrerer vi i x-retning fra $x=0$ til $x=-\tfrac{1}{2}y+2$ mens y er konstant. Deretter integrerer vi i y-retning, d.v.s. at vi "summerer" opp volumene av alle skivene fra $y=0$ til $y=4$. Vi får:

$$\iint_R x^2 y\,dA = \int_{y=0}^{y=4}\left(\int_{x=0}^{x=-\frac{1}{2}y+2} x^2 y\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{y=4} y\cdot\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{-\frac{1}{2}y+2}dy$$
$$= \tfrac{1}{3}\int_0^4 y\left[\left(-\tfrac{1}{2}y+2\right)^3 - 0^3\right]dy = \tfrac{1}{3}\int_0^4\left(-\tfrac{1}{8}y^4+\tfrac{3}{2}y^3-6y^2+8y\right)dy$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[-\tfrac{1}{40}y^5+\tfrac{3}{8}y^4-2y^3+4y^2\right]_0^4 = \underline{\underline{\tfrac{32}{5}}}$$

Vi kan imidlertid komme litt lettere fra integrasjonen ved å legge snittplanene vinkelrett på *x*-aksen. Ei snittlinje vil da strekke seg fra $y=0$ til $y=-2x+4$, slik at



$$\iint_R x^2 y\,dA = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=-2x+4} x^2 y\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=2} x^2\cdot\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{-2x+4}dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^2 x^2\left[(-2x+4)^2-0^2\right]dy = \tfrac{1}{2}\int_0^2\left(4x^4-16x^3+16x^2\right)dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{4}{5}x^5-4x^4+\tfrac{16}{3}x^3\right]_0^2 = \underline{\underline{\tfrac{32}{5}}}$$

Se figuren til venstre.

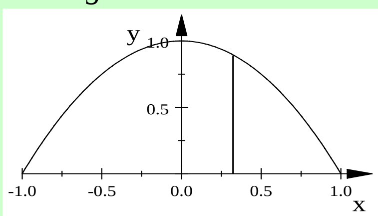
I eksemplene foran spilte det ingen særlig rolle hvordan vi la snittplanene. Det er imidlertid mer vanlig at den ene retningen gir klart enklere regninger enn den andre, slik som i eksemplet nedenfor.

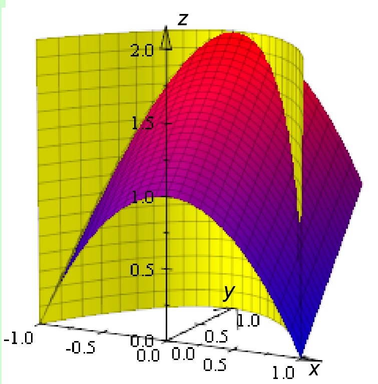
Eksempel 3: Beregn

$$\iint_R \left(1-x^2+y\right)dA$$

der R er gitt ved $0\le y\le 1-x^2$.

Løsning:





Figuren til venstre viser grafen til $y=g(x)=1-x^2$. Her virker det naturlig å legge snittene vinkelrett på *x*-aksen, slik at *y* går fra $y=0$ til $y=1-x^2$. Deretter integrerer vi i *x*-retning, og lar da *x* gå fra $x=-1$ til $x=1$. Vi setter i gang:

$$\iint_R\left(1-x^2+y\right)dA = \int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x^2}\left(1-x^2+y\right)dy\,dx$$
$$= \int_{x=-1}^{x=1}\left[\left(1-x^2\right)y+\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x^2}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\left(1-x^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)+\tfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2-0\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\tfrac{3}{2}-3x^2+\tfrac{3}{2}x^4\right)dx$$
$$= \left[\tfrac{3}{2}x-x^3+\tfrac{3}{10}x^5\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{\tfrac{8}{5}}}$$