1.4. Setninger om egenverdier og egenvektorer.

Vi har en lang rekke mer eller mindre nyttige setninger om egenverdier og egenvektorer. Jeg skal nå se på noen av disse.

Dersom matrisen **A** har egenverdier $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_n$
med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, gjelder:

1. Summen av egenverdiene er lik summen av elementene i hoveddiagonalen til **A**. Denne summen kalles ofte ***trasen til*** **A**, forkortet **tr(A)**.
2. Produktet av egenverdiene er lik $\det(\mathbf{A})$.
3. $\mathbf{A}^T$ har samme egenverdier som **A**.
4. $k \cdot \mathbf{A}$ har egenverdier $k \cdot \lambda_1,\ k \cdot \lambda_2, \dots, k \cdot \lambda_n$, men har de samme egenvektorene som **A**.
5. $\mathbf{A}^{-1}$ her egenverdier $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$, men har de samme egenvektorene som **A**.
6. $\mathbf{A}^k$ har egenverdier $\lambda_1^{\ k},\ \lambda_2^{\ k}, \dots, \lambda_n^{\ k}$, men har de samme egenvektorene som **A**.

Setning 1 og 2 kan være nyttige til å kontrollere beregningene av egenverdier. Jeg skal nøye meg med å bevise setningene for en 2×2-matrise. Da finner vi egenverdiene slik:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}\cdot a_{21} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} = 0$$

Når vi har funnet egenverdiene λ_1 og λ_2, må vi ha at

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\cdot\lambda_2 = 0.$$

Vi sammenlikner disse to uttrykkene, og ser at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

og at

$$\lambda_1\cdot\lambda_2 = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Setning 3 bevises ved å innse at den karakteristiske likningen til $\mathbf{A}^T$ er lik den karakteristiske likningen til **A**. Da blir egenverdiene like, men egenvektorene blir vanligvis ikke like.

Setning 4 bevises slik: Når **A** har egenverdi λ og egenvektor **v**, så er $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Da blir

$$k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) = k(\lambda\mathbf{v}) \quad \Leftrightarrow \quad (k\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{v} = (k\cdot\lambda)\cdot\mathbf{v},$$

som beviser Setning 4.

Setning 5 bevises slik: Når **A** har egenverdi λ og egenvektor **v**, så er $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Multipliserer foran med $\mathbf{A}^{-1}$ og får:

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\lambda\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{I}\cdot\mathbf{v}=\lambda\cdot\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$

som viser at $\mathbf{A}^{-1}$ her egenverdi $\frac{1}{\lambda}$ og egenverdi **v**.

Setning 6 bevises slik: Når **A** har egenverdi λ og egenvektor **v**, så er $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$.
Multipliserer foran med **A**, og får

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})=\mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{v}) \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{A}^2\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})=\lambda(\lambda\mathbf{v})=\lambda^2\mathbf{v}$$

som viser at $\mathbf{A}^2$ har egenverdi λ^2 og egenvektor **v**.

Bruker induksjon: Antar at $\mathbf{A}^k\mathbf{v}=\lambda^k\mathbf{v}$. Hvis dette stemmer, kan jeg multiplisere foran med **A,** og får

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^k\mathbf{v}=\mathbf{A}\cdot\lambda^k\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{v}=\lambda^k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})=\lambda^k\cdot\lambda\mathbf{v}=\lambda^{k+1}\mathbf{v}.$$

Dette viser at dersom $\mathbf{A}^k$ har egenverdi λ^k og tilhørende egenvektor **v**, så har $\mathbf{A}^{k+1}$ egenverdi λ^{k+1} og egenvektor **v**. Men siden påstanden stemmer for $k=1$, må den stemme for alle høyere heltallige verdier av *k*. Dermed er setningen bevist.

***Eksempel 1.7*:** Vi har tidligere vist at matrisen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

har egenverdiene

$$\lambda_1=2 \text{ og } \lambda_2=-1$$

med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1=t_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2=t_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

a) Bruk Setning 1 og 2 til å kontrollere egenverdiene.

b) Bruk Setning 4 til å finne egenverdier og egenvektorer til

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0.1 & -0.2\\ -0.1 & 0\end{bmatrix}.$$

c) Vis at

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

og finn egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{A}^{-1}$ både ved å løse egenverdiproblemet og ved å bruke setning 5.

d) Finn $\mathbf{A}^2$, og finn egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{A}^2$ ved hjelp av setning 6.

Løsning:

a) Summen av egenverdiene blir $\lambda_1+\lambda_2=-1+2=1$, som er lik summen av elementene i hoveddiagonalen. Vi ser også at

$$\det(\mathbf{A}) = 1\cdot 0 - (-2)(-1) = -2$$

som er lik produktet av egenverdiene.

b) Vi ser at $\mathbf{M} = 0.1\mathbf{A}$. Setning 4 sier oss at $\mathbf{M}$ da har egenverdiene

$$\lambda_1 = 0.1\cdot 2 = \underline{\underline{0.2}} \text{ og } \lambda_2 = 0.1\cdot(-1) = \underline{\underline{-0.1}},$$

med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = t_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = t_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merknad: En vanlig feil består i å ”forenkle” matriser før man går i gang med å finne egenverdier og egenvektorer. Hvis du faller for fristelsen til å ”forenkle” matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

til

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

før du finner egenverdiene, vil du finne egenverdier som er 10 ganger større enn de rette verdiene.

c) Når

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

blir

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Finner egenverdiene til $\mathbf{A}^{-1}$:

$$(0-\lambda)\left(-\tfrac{1}{2}-\lambda\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finner egenvektorene:

$\lambda_1 = -1$:

$$\begin{aligned} (0-(-1))x_1 - 1x_2 &= 0 \\ \left(-\tfrac{1}{2}\right)x_1 + \left(-\tfrac{1}{2}-(-1)\right)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{v}_1 = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \left(0-\tfrac{1}{2}\right)x_1 - 1x_2 &= 0 \\ \left(-\tfrac{1}{2}\right)x_1 + \left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{v}_2 = t_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Dette stemmer med setning 5.

d) Når

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

blir

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2+0 \\ -1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}.$$

Setning 6 sier at $\mathbf{A}^2$ har egenverdier

$$\lambda_1 = 2^2 = \underline{\underline{4}} \text{ og } \lambda_2 = (-1)^2 = \underline{\underline{1}},$$

og de samme egenvektorene som **A**.

Som kontroll kan vi finne egenverdiene til $\mathbf{A}^2$ på vanlig måte:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

som stemmer med resultatene ovenfor.
Sjekk selv at egenvektorene blir de samme som før!