1.2. Sammenfallende egenverdier.

La oss starte med et eksempel:

Eksempel 1.4: Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer for matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = 2}}.$$

Vi ser at denne matrisen har kun en (eller to sammenfallende) egenvektorer.

Så går vi på jakt etter egenvektorer:

$$\begin{aligned} (2-2)x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 0x_1 + (2-2)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 0x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Den øverste likningen er kun oppfylt dersom $x_2 = 0$. Den nederste likningen er oppfylt for *alle* kombinasjoner av x_1 og x_2. Siden en nullvektor ikke kan være egenvektor, og $x_2 = 0$, kan x_1 være et hvilket som helst tall forskjellig fra null. Vi velger $x_1 = 1$, slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_1 = \underline{\underline{t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

Matrisen i eksemplet ovenfor har altså to sammenfallende egenverdier, men har kun en egenvektor. Er dette en generell egenskap? Se på neste eksempel:

Eksempel 1.5: Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer for en 2×2 enhetsmatrise.

Løsning: Siden enhetsmatrisen er

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

blir den karakteristiske likningen

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = 1}}.$$

Vi ser at denne matrisen har kun en (eller to sammenfallende) egenverdier.

Så går vi på jakt etter egenvektorer:

$$\begin{aligned} (1-1)x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 0x_1 + (1-1)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Her ser vi at begge likningene er oppfylt for *alle* verdier av x_1 og x_2. Enhver vektor (som ikke er lik nullvektoren) er derfor en egenvektor. Vi kan for eksempel velge $x_1 = 1$ og $x_2 = 0$, slik at en egenvektor blir

$$\mathbf{v}_1 = \underline{\underline{t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

Eller vi kan velge $x_1 = 0$ og $x_2 = 1$, slik at en egenvektor blir

$$\mathbf{v}_2 = \underline{\underline{t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Begge disse vektorene er egenvektorer, og de er lineært uavhengige. Vi kan derfor slå fast at enhetsmatrisen har kun en (eller to sammenfallende) egenverdier, med to lineært uavhengige egenvektorer.

Eksemplene ovenfor viser at dersom en 2×2-matrise har sammenfallende egenverdier, kan den ha en eller to lineært uavhengige egenvektorer. Dette er eksempler på en generell regel:

Dersom en egenverdi har multiplisitet *k*, kan den ha 1, 2, … , *k* lineært uavhengige egenvektorer.

I et lite tillegg finner du et par eksempler på slike sammenfallende egenverdier for 3×3-matriser. Der kan du også se eksempler på bruk av dataverktøy, og på manuell beregning av slike egenvektorer.

Oppgave 1.3.