1.3. Komplekse egenverdier.

Når vi jobber med egenverdier og egenvektorer, råker vi før eller senere bort i komplekse egenverdier. Da kan det være nyttig å vite at:

1. Dersom en $n \times n$-matrise har bare reelle ledd, vil egenverdiene enten være reelle eller forekomme som kompleks konjugerte par.
2. Dersom to egenverdier er kompleks konjugerte, er også de tilhørende egenvektorene av formen
$$\mathbf{v}_1 = t_1(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \text{ og } \mathbf{v}_2 = t_2(\mathbf{x} - i\mathbf{y}).$$

Del 1 av setningen over følger av algebraens fundamentalteorem. Den karakteristiske likningen for en $n \times n$-matrise med bare reelle ledd blir en n'tegradslikning i λ der alle koeffisientene er reelle. Og en slik likning har enten reelle løsninger, eller løsningene forekommer som kompleks konjugerte par.

Del 2 av setningen har jeg bevist i et lite vedlegg.

La oss se på et lite eksempel:

Eksempel 1.6: Finn egenverdier og egenvektorer til matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi starter med å finne egenverdiene:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad .$$
$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \underline{1 \pm i}.$$

Så var det egenvektorene. For sikkerhets skyld finner vi egenvektorene til begge egenverdiene, selv om det egentlig er nok å finne bare den ene og kompleks konjugere den.

1) Finner egenvektoren tilknyttet egenverdien $1+i$:
$$\begin{aligned} (1-(1+i))x_1 - 1x_2 &= 0 \\ 1x_1 + (1-(1+i))x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -ix_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - ix_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hvis vi ganger den øverste likningen med i, ser vi at begge likningene blir like:
$$x_1 - ix_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = ix_2 .$$
Vi kan nå velge x_2 fritt, og setter $x_2 = t_1$ der t_1 er et tilfeldig valgt tall forskjellig fra null. Da blir den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \underline{t_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}} = \underline{t_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}.$$

Jeg har foretatt den siste omskrivningen for å splitte egenvektoren opp i en reell og en imaginær del.

2) Finner egenvektoren tilknyttet egenverdien $\lambda_2 = 1 - i$:

$$\begin{aligned} \big(1-(1-i)\big)x_1 - 1x_2 &= 0 \\ 1x_1 + \big(1-(1-i)\big)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} ix_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + ix_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hvis vi ganger den øverste likningen med $-i$, ser vi at begge likningene blir like:

$$x_1 + ix_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -ix_2 .$$

Vi kan nå velge x_2 fritt, og setter $x_2 = t_2$ der t_2 er et tilfeldig valgt tall forskjellig fra null. Da blir den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underline{t_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}} = \underline{t_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}.$$

Jeg har foretatt den siste omskrivningen for å splitte egenvektoren opp i en reell og en imaginær del.

Vi har altså funnet to løsninger:

Egenverdi $\underline{\underline{\lambda_1 = 1 + i}}$ med tilhørende egenvektor $\underline{\underline{\mathbf{v}_1 = t_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}}$.

Egenverdi $\underline{\underline{\lambda_2 = 1 - i}}$ med tilhørende egenvektor $\underline{\underline{\mathbf{v}_2 = t_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}}$.

Som ventet kan de to egenvektorene skrives på den formen som er angitt i ramma.

Legg merke til at tallene t_1 og t_2 selv kan være komplekse tall – og de behøver ikke være kompleks konjugerte. Istedenfor å beregne begge egenvektorene når egenverdiene er kompleks konjugerte slik jeg har gjort i dette eksemplet, vil jeg anbefale at du kun regner ut den ene og deretter bare fører opp den andre egenverdien som den kompleks konjugerte av den første, multiplisert med hver sine konstanter t_1 og t_2.

[Oppgave 1.4](#).