1. Egenverdiproblemet.

1.1. Den grunnleggende problemstillingen.

Fra den grunnleggende matriseregningen husker du sikkert at når en vektor **v** multipliseres med en kvadratisk matrise **A**, får vi en ny vektor **u** slik:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Kan vi innrette oss slik at den nye vektoren **u** blir parallell med **v**? Dersom **u** er parallell med **v**, må vi ha at $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ der λ er et tall, slik at

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

La meg presisere problemstillingen:

> Gitt en kvadratisk matrise **A**. Finn en vektor **v** og et tall λ slik at
>
> $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$
>
> Vi sier at **v** er en ***egenvektor*** til **A**,
> og at λ er den tilhørende ***egenverdien***.

Eksemplet nedenfor viser hvordan vi kan angripe dette problemet:

***Eksempel 1.1*:** Finn egenverdier med tilhørende egenvektorer for matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi er på jakt etter en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

og et tall λ som er slik at

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Med vår matrise **A** blir dette

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Dette fører til likningssettet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= \lambda x_1 \\ -x_1 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tilsynelatende er dette to likninger med tre ukjente. Men vi kan tolke dette som et liknings-system som vi skal finne x_1 og x_2 av. I så fall er dette et *homogent* likningssystem. Fra teorien for slike likningssystem vet vi at det alltid har løsningen $x_1 = x_2 = 0$. Men denne løsningen gir jo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, som ikke er særlig interessant. Men teorien sier også at vi kan få andre løsninger dersom determinanten til koeffisientmatrisen er lik null:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(-\lambda)-(-1)\cdot(-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda+\lambda^2-2=0\,.$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Vi har altså funnet to forskjellige egenverdier, og må finne de tilhørende egenvektorene. Vi må da gå tilbake til likningssettet

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

og sette inn de to egenverdiene etter tur:

1) Finner egenvektoren tilknyttet egenverdien $\underline{\lambda_1 = 2}$:

$$\begin{aligned} (1-2)x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -1x_1 + (0-2)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2x_2$$

Vi kan nå velge x_2 fritt, og setter $x_2 = t_1$ der t_1 er et tilfeldig valgt tall forskjellig fra null. Da blir den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \underline{t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Enhver vektor $\mathbf{v}_1$, uansett verdi av t_1, vil da være en egenvektor tilknyttet $\lambda_1 = 2$.

2) Finner egenvektoren tilknyttet egenverdien $\underline{\lambda_2 = -1}$:

$$\begin{aligned} (1-(-1))x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -1x_1 + (0-(-1))x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Vi kan nå velge x_2 fritt, og setter $x_2 = t_2$ der t_2 er et tilfeldig valgt tall forskjellig fra null. Da blir den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underline{t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Enhver vektor $\mathbf{v}_2$, uansett verdi av t_2, vil da være en egenvektor tilknyttet $\lambda_2 = -1$.

Vi har altså funnet to løsninger:

Egenverdi $\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}$ med tilhørende egenvektor $\underline{\underline{\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$.

Egenverdi $\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$ med tilhørende egenvektor $\underline{\underline{\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$.

Som kontroll kan vi regne ut $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$ for våre to løsninger og se hva vi får:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\cdot t_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_1 .$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot t_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t_2\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\cdot t_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\cdot\mathbf{v}_2 .$$

Vi ser at $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ i begge tilfellene.

Nå er det på tide å ta for oss det generelle egenverdiproblemet, og se hvordan det kan løses:

Gitt en kvadratisk $n\times n$-matrise

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Bestem om mulig en **egenverdi** λ
med tilhørende **egenvektor**

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

som er slik at

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} .$$

Vi kan naturligvis gå fram på samme måte som i Eksempel 1.1. Men vi kan også sette opp en standard prosedyre som gjør det enklere å løse problemet. Problemet var altså:

Finn $\mathbf{v}$ og λ slik at

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{I}\cdot\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Skrives dette ut på komponentform, får vi

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \qquad (*)\\
&\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0
\end{aligned}$$

Dette er et homogent lineært likningssystem. Fra teorien for slike likningssystem vet vi at dersom likningssystemet skal ha andre løsninger enn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, må determinanten til koeffisientmatrisen være lik null:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dette blir en n'tegradslikning i λ, som kalles **den karakteristiske likningen**. Den vil gi n løsninger (der noen kan være sammenfallende). For hver verdi av λ kan vi nå finne en egenvektor ved innsetting i (*). Vi summerer opp:

Vi går fram slik for å finne egenverdier med tilhørende egenvektorer for den kvadratiske matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Finn først egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ved å løse ***den karakteristiske likningen***

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

For hver egenverdi λ_i finner du den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ved å løse likningssystemet

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_i)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\
&\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda_i)x_n = 0
\end{aligned}$$

Vi tester denne oppskriften i neste eksempel:

***Eksempel 1.2*:** Finn egenverdier med tilhørende egenvektorer for matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi starter med å finne egenverdiene:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 .$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}.$$

Så var det egenvektorene:

1) Finner egenvektoren tilknyttet egenverdien $\underline{\lambda_1 = 3}$:

$$\begin{matrix} (2-3)x_1 + 1x_2 = 0 \\ 4x_1 + (-1-3)x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Vi kan nå velge x_2 fritt, og setter $x_2 = t_1$ der t_1 er et tilfeldig valgt tall forskjellig fra null. Da blir den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \underline{t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

2) Finner egenvektoren tilknyttet egenverdien $\underline{\lambda_2 = -2}$:

$$\begin{matrix} (2-(-2))x_1 + 1x_2 = 0 \\ 4x_1 + (-1-(-2))x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 4x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -4x_1$$

Vi kan nå velge x_1 fritt, og setter $x_1 = t_2$ der t_2 er et tilfeldig valgt tall forskjellig fra null. Da blir den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 \\ -4t_2 \end{bmatrix} = \underline{t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}}.$$

Vi har altså funnet to løsninger:

Egenverdi $\underline{\underline{\lambda_1 = 3}}$ med tilhørende egenvektor $\underline{\underline{\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$.

Egenverdi $\underline{\underline{\lambda_2 = -2}}$ med tilhørende egenvektor $\underline{\underline{\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}}}$.

Du får mye bruk for å beregne egenverdier og egenvektorer. Selv om vi i praksis ofte bruker dataverktøy til å finne egenverdier og egenvektorer, vil jeg sterkt anbefale at du vet hvordan du løser slike problem for hand. Overbevis deg derfor om at du kan løse de **E**lementære, **E**nkle oppgavene i Oppgave **E**1.1 før du leser videre.

Så skal vi se hvordan teknikken fungerer med en 3×3-matrise:

Eksempel 1.3: Finn egenverdier og egenvektorer til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Finner først egenverdiene ved å løse den karakteristiske likningen

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Jeg beregner determinanten ved å utvikle den etter 1. kolonne. Dette gir

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\big((2-\lambda)(-1-\lambda)-1\cdot 1\big)+1\cdot\big(1(-1-\lambda)-1(-2)\big)=0$$

$$(1-\lambda)\left(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-1\right)+(-1-\lambda+2)=0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-3\right)+(1-\lambda)=0$$

Hvis jeg nå fortsetter med å multiplisere ut, får jeg en 3.gradslikning i λ. Heldigvis kan jeg unngå dette ved se at $(1-\lambda)$ er felles faktor i de to leddene, og sette denne utenfor parentes. Da får jeg:

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-3+1\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=0.$$

Løsningen blir

$$\lambda-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\lambda=1}$$

eller

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Det er altså tre egenverdier:

$$\underline{\underline{\lambda_1=1}},\ \underline{\underline{\lambda_2=2}},\ \underline{\underline{\lambda_3=-1}}.$$

For hver av disse egenverdiene må jeg finne en egenvektor. Jeg setter da λ-verdien inn i likningen

$$(1-\lambda)x_1 + 1x_2 - 2x_3 = 0$$
$$-1x_1 + (2-\lambda)x_2 + 1x_3 = 0$$
$$0x_1 + 1x_2 + (-1-\lambda)x_3 = 0$$

og finner x_1, x_2 og x_3:

Egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{aligned} (1-1)x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -1x_1 + (2-1)x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + (-1-1)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Både første og siste likning gir

$x_2 = 2x_3$.

Da gir midterste likning

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 + x_3 = 2x_3 + x_3 = 3x_3$.

Lar vi x_3 være et tilfeldig tall som vi kaller t_1, blir egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t_1 \\ 2t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_2 = 2}$:

$$\begin{aligned} (1-2)x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -1x_1 + (2-2)x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + (-1-2)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Her gir siste likning at

$x_2 = 3x_3$.

Midterste likning gir

$x_1 = x_3$.

Som kontroll setter vi dette inn i øverste likning:

$-x_1 + x_2 - 2x_3 = -x_3 + 3x_3 - 2x_3 = 0$.

Lar vi x_3 være et tilfeldig tall som vi kaller t_2, blir egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 \\ 3t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_3 = -1}$:

$$\begin{aligned} (1-(-1))x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -1x_1 + (2-(-1))x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + (-1-(-1))x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Siste likning gir direkte

$$x_2 = 0.$$

Da gir begge de to andre likningene

$$-x_1 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3.$$

Lar vi x_3 være et tilfeldig tall som vi kaller t_3, blir egenvektoren

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_3 \\ 0 \\ t_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{t_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

Du ser at beregning av egenverdier med tilhørende egenvektorer kan medføre mye pirkarbeid. I praksis utføres dette gjerne med dataverktøy. Du finner korte oppskrifter for hvordan dette gjøres i disse vedleggene:

Bruk av TI-89.
Bruk av Scientific Notebook.

Selv om du helst bruker dataverktøy til å beregne egenverdier og egenvektorer, bør du likevel drille teknikken for hand med et par oppgaver.

Når vi bruker egenverdier og egenvektorer i praksis, viser det seg at vi ofte må kreve at $n \times n$-matriser har *n* lineært uavhengige egenvektorer. Da får vi bruk for setningen nedenfor (som vi ikke skal bevise):

Dersom en $n \times n$-matrise har *n* forskjellige egenverdier, har matrisen også *n* lineært uavhengige egenvektorer.

I et eget notat har jeg sett på hva som kan skje dersom matrisen har to eller flere sammenfallende (like) egenverdier.

Jeg har også laget et lite notat som hjelper deg på vei dersom du får komplekse egenverdier.

Nå fins det mange setninger om egenverdier og egenvektorer som det kan være nyttig å kjenne til. Jeg har samlet noen slike setninger i et lite notat.

Nå lurer du sikkert fælt på hva egenverdier og egenvektorer kan brukes til. Da må du først lære deg *diagonalisering* av matriser. Deretter kan du gå løs på anvendelser, for eksempel:

Løsing av system av lineære 1.ordens differenslikninger.
Løsing av system av lineære 1.ordens differensiallikninger.
Forenkling av kvadratiske former.