2. Diagonalisering.

Vi skal nå se på en sammenheng som i første omgang kan virke temmelig unyttig. Men du skal nok få bruk for den etter hvert!

Sammenhengen er slik:

La **A** være en $n \times n$-matrise med egenverdier $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
og tilhørende lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$.
Definer disse matrisene:

Egenvektor-matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

og

Egenverdi-matrisen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Da er

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$

Du finner en skisse til et bevis i vedlegget.

***Eksempel 2.1*:** Undersøk om setningen stemmer når

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Dette er den samme matrisen som vi benyttet i Eksempel 1.1. Der fant vi ut at **A** har egenverdier

$$\lambda_1 = 2 \text{ og } \lambda_2 = -1,$$

med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette opp

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Men hvilke verdier for t_1 og t_2 skal vi bruke når vi setter opp $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$? Det er faktisk helt likegyldig. Når vi senere skal sette opp $\mathbf{M}^{-1}$ og deretter multiplisere sammen, vil t_1 og t_2 forkortes bort. Derfor setter vi ganske enkelt $t_1 = t_2 = 1$, slik at

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nå får vi:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2 & 1-2 \\ 2+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}.$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+0 & 0-1 \\ 2+0 & 0-1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}.$$

Dette stemmer med at $\mathbf{A}\cdot\mathbf{M} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{D}$.

Når vi skriver en matrise **A** på formen $\mathbf{MDM}^{-1}$**,** sier vi at vi *diagonaliserer* matrisen. Av eksemplet foran får vi:

Eksempel 2.2**:** Diagonaliser matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi vet fra forrige eksempel at

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

og at

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{-2\cdot1-1\cdot1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Da blir diagonaliseringen av **A**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{MDM}^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}}.$$

Det kan virke temmelig klønete å skrive en matrise på en så komplisert form som vi har gjort ovenfor. Men neste setning med tilhørende eksempel antyder at omskrivingen kanskje kan være nyttig likevel.

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\cdot\mathbf{D}^k\cdot\mathbf{M}^{-1}$$
$$= \mathbf{M}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1{}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n{}^k \end{bmatrix}\cdot\mathbf{M}^{-1}$$

Også her er beviset flyttet ut til et vedlegg.

Legg merke til at vi beregner $\mathbf{D}^k$ ved å opphøye alle egenverdiene langs hoveddiagonalen i *k*. Dette er en enkel operasjon, og er noe av grunnen til at diagonalisering viser seg å være et nyttig redskap.

***Eksempel 2.3*:** Hva blir $\mathbf{A}^{10}$ når
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}?$$

Løsning: Istedenfor å multiplisere **A** med seg selv 10 ganger, bruker vi resultatene fra Eksempel 2.2. Da får vi

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{D}^{10}\cdot\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2048 & 1 \\ 1024 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2048}{3}+\frac{1}{3} & -\frac{2048}{3}+\frac{2}{3} \\ -\frac{1024}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1024}{3}+\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 683 & -682 \\ -341 & 342 \end{bmatrix}}}$$

Prøv deg selv på en oppgave.

Nå er du sikkert veldig spent på hva dette kan brukes til. Vi skal etter hvert se på:

- Løsing av systemer av lineære, 1.ordens differenslikninger. Slike likningssystem dukker opp blant annet når vi skal lage matematiske modeller av hvordan dyrebestander som påvirker hverandre utvikler seg over tid.

- Løsing av systemer av lineære, 1.ordens differensiallikninger. Slike systemer forekommer ofte når vi lager matematiske modeller av størrelser som varierer kontinuerlig, og som påvirker hverandre. Dette er vanlig i fysiske systemer.

- Handtering av ***kvadratiske former***. Dette er en spesiell type andregradsuttrykk i flere variable. Vi skal spesielt se hvordan vi kan bruke egenvektorene som basisvektorer i et nytt koordinatsystem, der grafene blir lette å tegne.