5. System av lineære 1.ordens differenslikninger.

I praksis kommer vi ofte bort i at ledd i en tallfølge avhenger ikke bare av tidligere ledd i samme tallfølgen, men også av tidligere ledd i andre tallfølger. Hvis vi for eksempel lar bestandene av torsk i Barentshavet i år *n* utgjøre ledd i en tallfølge, og bestandene av lodde utgjøre ledd i en annen tallfølge, vil torskebestandene og loddebestandene avhenge av hverandre.

Vi skal begrense oss til to tallfølger $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$, der vekselvirkningen mellom leddene er gitt ved lineære homogene 1.ordens differenslikninger. Slike systemer kan da skrives

$$\begin{aligned} x_n &= a \cdot x_{n-1} + b \cdot y_{n-1} \\ y_n &= c \cdot x_{n-1} + d \cdot y_{n-1} \end{aligned}$$

der *a*, *b*, *c* og *d* er konstanter. Det er imidlertid mer vanlig å bruke skrivemåten

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a \cdot x_n + b \cdot y_n \\ y_{n+1} &= c \cdot x_n + d \cdot y_n \end{aligned}$$

For å konkretisere dette stoffet, kan vi se på eksemplet nedenfor:

Eksempel 5.1: Sett opp de 5 første leddene i tallfølgene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 2y_n \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Løsning: Vi regner ut x_{n+1} og y_{n+1} for $n = 0, 1, \cdots, 3$, og får:

$x_0 = 1$	$y_0 = 0$
$x_1 = -x_0 + 2y_0 = -1 + 2 \cdot 0 = -1$	$y_1 = 2x_0 + 2y_0 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$
$x_2 = -x_1 + 2y_1 = -(-1) + 2 \cdot 2 = 5$	$y_2 = 2x_1 + 2y_1 = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 2$
$x_3 = -x_2 + 2y_2 = -5 + 2 \cdot 2 = -1$	$y_3 = 2x_2 + 2y_2 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 14$
$x_4 = -x_3 + 2y_3 = -(-1) + 2 \cdot 14 = 29$	$y_4 = 2x_3 + 2y_3 = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 14 = 26$

Når vi skal løse et slikt system av differenslikninger (d.v.s. finne formler for x_n og y_n) eliminerer vi en av de ukjente på en slik måte at vi skaffer oss en 2.ordens differenslikning i den andre ukjente. Etter at denne likningen er løst, kan vi finne den siste ukjente. Vi må imidlertid holde tunga rett i munnen under disse operasjonene, noe eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 5.2: Løs systemet av differenslikninger i eksemplet foran:

$$\begin{aligned} (1) \quad x_{n+1} &= -x_n + 2y_n \\ (2) \quad y_{n+1} &= 2x_n + 2y_n \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Jeg starter med å forskyve likning (1) ett ledd utover i tallfølgene, slik at likningen blir

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= -x_{n+1} + 2y_{n+1} \\ &= -x_{n+1} + 2(2x_n + 2y_n) \\ &= -x_{n+1} + 4x_n + 4y_n \end{aligned}$$

Så løser jeg y_n av likning (1):

$$y_n = \tfrac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right)$$

og setter inn:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= -x_{n+1} + 4x_n + 4y_n \\ &= -x_{n+1} + 4x_n + 4\cdot\tfrac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right) \\ &= -x_{n+1} + 4x_n + 2x_{n+1} + 2x_n \\ &= x_{n+1} + 6x_n \end{aligned}$$

Dermed har vi skaffet oss den lineære homogene 2.ordens differenslikningen

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0 .$$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 - t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = \underline{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-2)^n} .$$

Så må vi finne y_n. Vi benytter da at

$$\begin{aligned} y_n &= \tfrac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right) = \tfrac{1}{2}\left(\left(C_1\cdot 3^{n+1} + C_2\cdot(-2)^{n+1}\right) + \left(C_1\cdot 3^n + C_2\cdot(-2)^n\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(C_1\left(3^{n+1} + 3^n\right) + C_2\left((-2)^{n+1} + (-2)^n\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(C_1\cdot 3^n\left(3^1 + 1\right) + C_2\cdot(-2)^n\left((-2)^1 + 1\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(4C_1\cdot 3^n - C_2\cdot(-2)^n\right) \\ &= \underline{2C_1\cdot 3^n - \tfrac{1}{2}C_2\cdot(-2)^n} \end{aligned}$$

Nå gjenstår det å finne C_1 og C_2. Vi benytter da at

$$\begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} C_1\cdot 3^0 + C_2\cdot(-2)^0 = 1 \\ 2C_1\cdot 3^0 - \tfrac{1}{2}C_2\cdot(-2)^0 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - \tfrac{1}{2}C_2 = 0 \end{matrix}$$

Vi multipliserer den nederste likningen ned 2 og legger sammen likningene. Da får vi

$$5C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{\tfrac{1}{5}} .$$

Av den øverste likningen følger nå

$$C_2 = 1 - C_1 = 1 - \tfrac{1}{5} = \underline{\tfrac{4}{5}} .$$

Dermed har vi løsningen

$$x_n = \tfrac{1}{5}\cdot 3^n + \tfrac{4}{5}\cdot(-2)^n = \underline{\underline{\tfrac{1}{5}\left(3^n + 4\cdot(-2)^n\right)}} .$$

$$y_n = 2\cdot\tfrac{1}{5}\cdot 3^n - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot(-2)^n = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}\left(3^n - (-2)^n\right)}} .$$

Kontroller selv at disse formlene gir de samme verdiene som vi regnet oss fram til i eksemplet foran.

Oppgave 5.1.

Du synes sikkert at framgangsmåten foran er plundrete. Og det blir mye verre dersom vi har større likningssystem med flere ukjente, eller dersom likningene er *inhomogene*. Trøst deg med at dersom du vet hvordan du beregner egenverdier og egenvektorer for kvadratiske matriser, kan du benytte matrisemetoder til å løse slike problem på en mye enklere måte.