3. Lineære 2. ordens differenslikninger.

3. 1. Innledning.

La $\{x_n\}$ være en tallfølge. En differenslikning av typen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} + f(n)$$

kalles en *lineær 2. ordens differenslikning*. Vi skal kun se på likninger der *A* og *B* er konstanter.

Dersom $f(n) \equiv 0$ kalles likningen *homogen*. I motsatt fall er likningen *inhomogen*.

For å løse slike likninger, benytter vi denne setningen:

> Den generelle løsningen av differenslikningen
> $$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} + f(n)$$
> er
> $$\{x_n\} = \{h_n + p_n\}$$
> der $\{h_n\}$ er løsningen av den tilhørende homogene likningen,
> mens $\{p_n\}$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen.

Beviset er helt likt det tilsvarende beviset for 1. ordens differenslikninger, og jeg vil ikke gjennomføre det.

Men hvordan skal vi finne $\{h_n\}$ og $\{p_n\}$? La oss starte med $\{h_n\}$. Da trenger vi denne setningen:

> Den homogene lineære differenslikningen
> $$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$
> har alltid to lineært uavhengige løsninger som vi skal kalle $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$.
> Den generelle løsningen av likningen er en lineærkombinasjon av disse, d.v.s. at
> $$\{x_n\} = \{C_1 x_{1,n} + C_2 x_{2,n}\}.$$

Denne setningen inneholder egentlig tre påstander:

1. Differenslikningen har alltid to lineært uavhengige løsninger $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$.
2. En lineærkombinasjon $\{x_n\} = \{C_1 x_{1,n} + C_2 x_{2,n}\}$ er også løsning av likningen.
3. Det fins ingen andre løsninger av differenslikningen.

Påstand 2 bevises enkelt ved direkte innsetting. De andre to påstandene skal vi ikke bevise.

Dersom vi kjenner to ledd som følger etter hverandre i tallfølgen, kan vi bestemme de to konstantene C_1 og C_2.

Men fremdeles er vi ikke ved veis ende. Hvordan skal vi løse den homogene likningen? Det tar vi for oss nå.

3.2. Homogene likninger.

Vi løser den homogene differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$

slik:

For å løse differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$

setter vi opp og løser den *karakteristiske likningen*

$$t^2 = A \cdot t + B\,.$$

Vi får da tre muligheter:

- To forskjellige reelle røtter t_1 og t_2:
  Løsningen av differenslikningen blir
  $$\{x_n\} = \{C_1 \cdot t_1^{\,n} + C_2 \cdot t_2^{\,n}\}\,.$$
- To like røtter *t*:
  Løsningen av differenslikningen blir
  $$\{x_n\} = \{C_1 \cdot t^n + C_2 \cdot n \cdot t^n\}\,.$$
- To kompleks konjugerte røtter $t = r \cdot e^{\pm\theta i}$:
  Løsningen av differenslikningen blir
  $$\{x_n\} = \{r^n \left(K_1 \cos(n\theta) + K_2 \sin(n\theta)\right)\}$$

Teorien bak denne setningen finner du i et eget notat.

Eksempel 3.1: Løs differenslikningen

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \text{ når } n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 2\,.$$

Løsning: Setter først opp den karakteristiske likningen og løser den:

$$t^2 = 3t - 2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Dermed er

$$\{x_{1,n}\} = \{2^n\} \quad \text{og} \quad \{x_{2,n}\} = \{1^n\} = \{1\}$$

to lineært uavhengige tallfølger som begge er løsninger av den gitte likningen, slik at

$$\{x_n\} = \underline{\{C_1 \cdot 2^n + C_2\}}$$

er en generell løsning av likningen.
Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 = 2C_1 + C_2 = 0\,.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 = 4C_1 + C_2 = 2\,.$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$2C_1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 1}\,.$$

Dette gir videre

$$2C_1 + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -2C_1 = \underline{-2}\,.$$

Løsningen blir da

$$\{x_n\} = \{C_1 \cdot 2^n + C_2\} = \underline{\underline{\{2^n - 2\}}}\,.$$

Oppgave 3.1

Eksempel 3.2: Løs differenslikningen

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \quad \text{når } n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$x_1 = 6\,, \qquad x_2 = 20\,.$$

Løsning: Vi setter opp den karakteristiske likningen:

$$t^2 = 4t - 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \underline{2}\,.$$

Differenslikningen får da den generelle løsningen

$$\{x_n\} = \underline{\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n\}}\,.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C_1 + 2C_2 = 6$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 4C_1 + 8C_2 = 20$$

Multipliserer den øverste likningen med (-2) og adderer:

$$4C_2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2 = 2}\,.$$

Den øverste likningen gir nå

$$2C_1 = 6 - 2C_2 = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 1}\,.$$

Løsningen av likningen blir da

$$\{x_n\} = \{2^n + 2n \cdot 2^n\} = \underline{\underline{\{(1 + 2n) \cdot 2^n\}}}\,.$$

Oppgave 3.2.

***Eksempel 3.3*:** Løs differenslikningen

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} \quad \text{når } n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 2\,.$$

Løsning: For oversiktens (og kontrollens) skyld kan vi starte med å regne ut noen av de første leddene i tallfølgen. Vi får:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	2	1	-1	-2	-1	1	2

Vi ser at $x_7 = x_1$, $x_8 = x_2$ osv. Tallfølgen er altså periodisk med periode $n = 6$.

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underline{\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i}.$$

Vi får to kompleks konjugerte røtter med:

- Modulus:

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1$$

- Argumentvinkel:

$$\tan\theta = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\theta = \tfrac{1}{3}\pi}.$$

Den generelle løsningen av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\left\{K_1 \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right) + K_2 \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right)\right\}}.$$

Finner K_1 og K_2 av startbetingelsene:

$$x_1 = K_1 \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + K_2 \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = K_1 \cdot \tfrac{1}{2} + K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1$$

$$x_2 = K_1 \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + K_2 \sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = K_1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 2$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$K_2 \cdot \sqrt{3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K_2 = \sqrt{3}}.$$

Da er

$$K_1 \cdot \tfrac{1}{2} = 1 - K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K_1 = -1}.$$

Den komplette løsningen er:

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{-\cos\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right) + \sqrt{3} \cdot \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right)\right\}}}.$$

Dette er en periodisk funksjon, der vi finner perioden ved å sette

$$n \cdot \tfrac{1}{3}\pi = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n = 6},$$

som vi så av tabellen i starten av eksemplet. Du vil også se at løsningen stemmer med de leddene som er regnet ut i tabellen.

Oppgave 3.3.

***Eksempel 3.4*:** En tallfølge er gitt ved differenslikningen

$$x_n = r \cdot x_{n-1} - x_{n-2}$$

der r er et positivt reelt tall. Hvordan blir tallfølgen for ulike verdier av r?

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = r \cdot t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - r \cdot t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2} = \tfrac{1}{2} r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} r\right)^2 - 1}.$$

Vi får nå tre muligheter:

1. $r > 2$. Da blir det to forskjellige reelle røtter. Minst en av dem er større enn 1. Da må x_n inneholde et ledd $C \cdot t^n$ der $t > 1$, slik at dersom $C \neq 0$ vil $x_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

2. $r = 2$. Da blir det to like røtter $t = 1$. Løsningen blir da av formen
$$x_n = C_1 + C_2 n.$$
Også her vil $x_n \to \infty$ når $n \to \infty$ dersom $C_2 \neq 0$.

3. $0 < r < 2$. Vi får da to kompleks konjugerte røtter
$$t = \tfrac{1}{2} r \pm i \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2} r\right)^2}.$$
Disse røttene har modulus
$$R = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} r\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2} r\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} r\right)^2 + \left(1 - \left(\tfrac{1}{2} r\right)^2\right)} = 1.$$
Da vil tallfølgen $\{x_n\}$ danne en periodisk svingning med konstant amplitude.

Oppgave 3.4.

3.3. Inhomogene differenslikninger.

Prinsippet for løsing av inhomogene differenslikninger

$$x_n = A x_{n-1} + B x_{n-2} + f(n)$$

har vi allerede satt opp: Løs først den tilhørende homogene likningen, og finn deretter en partikulær løsning p_n.

Vi finner partikulær løsning på samme måte som for lineære 1. ordens differenslikninger: Prøv en løsning av samme form som $f(n)$. Dette betyr at:

- Dersom $f(n)$ er et polynom i *n*, lar vi også partikulærløsningen være et polynom i *n* av samme grad.
- Dersom $f(n) = C \cdot a^n$ prøver vi en partikulærløsning $p_n = D \cdot a^n$.
- Dersom $f(n) = C_1 \cos(\alpha n) + C_2 \sin(\alpha n)$, prøver vi en partikulærløsning av formen $p_n = D_1 \cos(\alpha n) + D_2 \sin(\alpha n)$. Merk at p_n må inneholde *både* sinus- og cosinusledd selv om C_1 eller C_2 er lik null.

Noen ganger fører ikke metoden foran fram. Det gjelder i alle fall dersom vår partikulær-løsning allerede inngår i løsningen av den homogene likningen. Da multipliserer vi partikulærløsningen vår med *n*, og prøver på nytt. Dette illustreres i eksemplet nedenfor:

***Eksempel 3.5*: Løs differenslikningen**

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + f(n)$$

når:

a) $f(n) = 2n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b) $f(n) = 2^n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = t + 2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

slik at løsningen av den tilhørende homogene likningen blir

$$h_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n .$$

a) Siden $f(n) = 2n$ ikke inngår i h_n, prøver jeg en partikulærløsning

$$p_n = Cn + D \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-1} = C(n-1) + D \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-2} = C(n-2) + D .$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2} + 2n$$
$$Cn + D = C(n-1) + D + 2\big(C(n-2) + D\big) + 2n$$
$$Cn + D = Cn - C + D + 2Cn - 4C + 2D + 2n$$
$$(-2C - 2)n + (5C - 2D) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for *alle* verdier av n, må vi kreve at

$$-2C - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = -1}$$

og at

$$5C - 2D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = \tfrac{5}{2}C = \underline{-\tfrac{5}{2}} .$$

Den generelle løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n - n - \tfrac{5}{2}\right\}} .$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 - 1 - \tfrac{5}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 - C_2 = \tfrac{9}{2} .$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2 - 2 - \tfrac{5}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4C_1 + C_2 = \tfrac{15}{2} .$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$6C_1 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 2} .$$

Da blir

$$C_2 = \tfrac{15}{2} - 4C_1 = \tfrac{15}{2} - 4 \cdot 2 = \underline{-\tfrac{1}{2}} .$$

Komplett løsning av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{2 \cdot 2^n - \tfrac{1}{2} \cdot (-1)^n - n - \tfrac{5}{2}\right\}}} .$$

b) Siden 2^n inngår i h_n, prøver jeg en partikulærløsning

$$p_n = D \cdot n \cdot 2^n \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-1} = D \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-2} = D \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} .$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2} + 2^n$$
$$D \cdot n \cdot 2^n = D \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} + 2D \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} + 2^n$$

Deler på 2^{n-2}, og multipliserer ut:

$$D \cdot n \cdot 2^2 = D \cdot (n-1) \cdot 2 + 2D(n-2) + 2^2$$
$$4Dn = 2Dn - 2D + 2Dn - 4D + 4$$
$$0 = -6D + 4 \quad \Leftrightarrow \quad D = \underline{\tfrac{2}{3}}$$

Den generelle løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n + \tfrac{2}{3} n \cdot 2^n\right\}}.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2^1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 - C_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2 + \tfrac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4C_1 + C_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$6C_1 = -\tfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{-\tfrac{1}{9}}.$$

Da blir

$$C_2 = -\tfrac{1}{3} - 4C_1 = -\tfrac{1}{3} - 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{9}\right) = \underline{\tfrac{1}{9}}.$$

Komplet løsning av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{-\tfrac{1}{9} \cdot 2^n + \tfrac{1}{9} \cdot (-1)^n + \tfrac{2}{3} \cdot n \cdot 2^n\right\}}}.$$

Oppgave 3.5.

Vi har nå vært gjennom de grunnleggende emnene innen lineære differenslikninger, og du bør trene ved å løse noen blandede oppgaver (vesentlig gamle eksamensoppgaver).

Jeg har også laget et par tilleggs-notat:

- Et lite notat om høyere ordens lineære differenslikninger. Notatet viser hvordan prinsippene for løsing av lineære 2.ordens differenslikninger kan generaliseres til høyere ordens likninger.
- Et notat om hvordan system av 1.ordens lineære, homogene differenslikninger kan omformes til en høyere ordens likning. Teknikken er mest av teoretisk interesse siden slike problem vanligvis løses ved matrisemetoder.