2. Lineære 1. ordens differenslikninger.

2. 1. Innledning.

La $\{x_n\}$ være en tallfølge. En differenslikning som kan skrives på formen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n)$$

eller

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + f(n)$$

der A er en konstant, kalles en *lineær 1. ordens differenslikning med konstante koeffisienter.* Det er kun denne formen for 1. ordens differenslikninger vi skal ta for oss.

Dersom $f(n) \equiv 0$ slik at likningen blir $x_{n+1} = A \cdot x_n$, sier vi at likningen er *homogen*.
I motsatt fall er den *inhomogen*.

Vi skal starte med å løse homogene likninger. Deretter tar vi for oss de inhomogene likningene.

2. 2. Homogene differenslikninger.

Vi skal først løse den *homogene* likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n .$$

Vi ser at denne likningen fører til at:

$$x_1 = A \cdot x_0$$

$$x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot (A \cdot x_0) = A^2 \cdot x_0$$

$$x_3 = A \cdot x_2 = A \cdot (A^2 \cdot x_0) = A^3 \cdot x_0$$

Og slik kan vi fortsette. For hvert ledd i tallfølgen må vi multiplisere det foregående leddet med A, slik at vi til slutt får

$$x_n = A^n \cdot x_0 .$$

Generelt kjenner vi ikke x_0. Det er derfor bedre å sette

$$x_n = C \cdot A^n$$

der C er en eller annen konstant.

Vi har altså funnet at:

> Den homogene lineære 1.ordens differenslikningen
> $$x_{n+1} = A \cdot x_n$$
> har løsning
> $$x_n = C \cdot A^n .$$
> Her er C er en konstant som kan bestemmes dersom vi kjenner et ledd i tallfølgen.

Eksempel 2.1: Løs differenslikningen

$$x_{n+1} = \tfrac{4}{5} x_n \text{ når } n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$x_0 = 10 .$$

Løsning: Vi vet at løsningen er av formen

$$x_n = C \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n .$$

Finner C:

$$x_0 = C \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^0 = C \cdot 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 10} .$$

Løsningen blir

$$x_n = \underline{\underline{10 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n}} .$$

Løs **Oppgave 2.1.**

2.3. Inhomogene differenslikninger.

Så går vi løs på den *inhomogene* likningen

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + f(n) .$$

For å løse den, får vi bruk for denne setningen:

La tallfølgen $\{p_n\}$ være en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n) .$$

La tallfølgen $\{h_n\}$ være løsning av den tilhørende homogene likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n .$$

Den generelle løsningen av den inhomogene likningen er da

$$\{x_n\} = \{h_n + p_n\} = \{C \cdot A^n + p_n\} .$$

En *partikulær løsning* er et eller annet uttrykk som passer i den gitte likningen.

Du finner et bevis for setningen i et eget notat.

Nå gjenstår det "bare" å finne en partikulær løsning. Det eksisterer generelle metoder for å finne slike løsninger, men de er vanligvis nokså omstendelige å bruke. Vi skal derfor benytte en "intelligent prøve-og-feile-metode". Den er slik:

Prøv en partikulær løsning p_n av samme form som $f(n)$.

Mer detaljert skal vi gå fram slik:

- Dersom $f(n)$ er et polynom i *n*, lar vi p_n være et polynom i *n* av samme grad og prøver å finne passe koeffisienter i polynomet.

- Dersom
  $$f(n) = B \cdot r^n,$$
  prøver vi
  $$p_n = C \cdot r^n$$
  der vi må finne *C*.

- Dersom
  $$f(n) = B_1 \sin(\alpha \cdot n) + B_2 \cos(\alpha \cdot n),$$
  prøver vi
  $$p_n = C_1 \sin(\alpha \cdot n) + C_2 \cos(\alpha \cdot n)$$
  der vi må finne C_1 og C_2.
  Merk at vi må ta med *både* sinus- og cosinusledd i p_n selv om B_1 eller B_2 er lik null.

Eksempel 2.2: Løs differenslikningen

$$x_0 = 4$$
$$x_{n+1} = \tfrac{3}{2} x_n - 1 \text{ når } n \in \mathbb{N}$$

Løsning: Løsningen av den homogene likningen er

$$h_n = \underline{C \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^n}.$$

I den gitte likningen er $f(n) = -1$. Jeg prøver derfor en partikulær løsning som er en konstant:

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K.$$

Setter inn i likningen for å finne *K*:

$$p_{n+1} = \tfrac{3}{2} p_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad K = \tfrac{3}{2} \cdot K - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} K = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K = 2}.$$

Den generelle løsningen av likningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^n + 2}.$$

Finner til slutt *C*:

$$x_0 = C \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^0 + 2 = C + 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 2}.$$

Altså blir løsningen

$$x_n = \underline{\underline{2 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^n + 2}}.$$

Eksempel 2.3: En bank gir 4% årlig rente på innskudd. Men banken tar også et gebyr på 100 kr pr år for å forvalte kontoen. Du setter inn $x_0 = 6000 \text{ kr}$ i banken, og lar beløpet stå urørt i *n* år. Hva har beløpet vokst til etter *n* år?

Løsning: Vi kaller beløpet etter *n* år for x_n. Av beskrivelsen ovenfor får vi differenslikningen

$$x_{n+1} = 1.04x_n - 100.$$

Dette er en inhomogen differenslikning, der løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$h_n = C \cdot 1.04^n.$$

Siden $f(n) = -100$, prøver jeg en konstant partikulærløsning:

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K.$$

Setter inn i likningen:

$$p_{n+1} = 1.04p_n - 100 \quad \Leftrightarrow \quad K = 1.04K - 100 \quad \Leftrightarrow \quad 0.04K = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K = 2500}.$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot 1.04^n + 2500}.$$

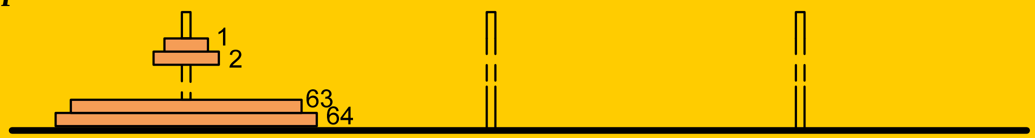
Finner *C*:

$$x_0 = C \cdot 1.04^0 + 2500 = C + 2500 = 6000 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 3500}.$$

Løsningen av likningen blir altså

$$\underline{\underline{x_n = 3500 \cdot 1.04^n + 2500}}.$$

Eksempel 2.4:



Legenden om "tårnene i Hanoi" er et klassisk eksempel på et problem som fører til en differenslikning. Legenden går ut på at ved et tempel i Hanoi er det plassert tre påler. Nedover den ene pålen var det tredd 64 sirkulære gullplater, der platene har stadig mindre radius jo høyere vi kommer i stabelen. Så skal munkene flytte en og en skive over på en annen påle inntil hele stabelen er flyttet over på en av de andre pålene. Flyttingen skal gjøres slik at de aldri legger en plate med større radius oppå en plate med mindre radius. Når flyttingen er ferdig, vil alt liv på jorda opphøre. Hva er det minste antall flyttinger som må til?

Løsning: Vi definerer x_n som antall flyttinger for å flytte *n* skiver fra en påle til en annen etter munkenes forskrift. Når vi skal flytte $n+1$ skiver, gjøres dette mest effektivt slik:

1. Først flytter vi *n* skiver over på en tom påle. Dette krever x_n flyttinger.
2. Så flytter vi skive nr $n+1$ over på en tom påle. Detter krever bare 1 flytting.
3. Til slutt flytter vi de *n* skivene oppå skive nr $n+1$. Dette krever x_n flyttinger.

I alt har vi da brukt $x_n + 1 + x_n = 2x_n + 1$ flyttinger. Med andre ord:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

Dessuten er det opplagt at $x_1 = 1$.

Vi løser først den tilhørende homogene likningen, som er

$$h_{n+1} = 2h_n.$$

Løsningen er

$$h_n = \underline{C \cdot 2^n}.$$

Så leter vi etter en partikulær løsning av formen

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K$$

der K er en konstant. Vi setter inn i likningen og får

$$K = 2K + 1 \quad \Leftrightarrow \quad K = \underline{-1}.$$

Den generelle løsningen er da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot 2^n - 1}.$$

Nå gjenstår det bare å finne C ved å benytte at $x_1 = 1$. Vi får

$$x_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot 2^1 - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{1}.$$

Dermed har vi løsningen

$$x_n = \underline{\underline{2^n - 1}}.$$

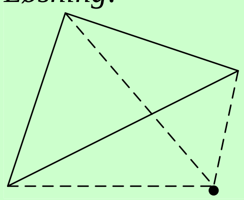
Med 64 skiver får vi at det må utføres $2^{64} - 1$ flyttinger før livet på jorda opphører. Det bør ikke være noen umiddelbar fare, selv om munkene jobber så raskt de bare kan.

Løs Oppgave 2.2.

En gang i blant fører ikke teknikken ovenfor fram. Da multipliserer vi vår "prøveløsning" med n, og prøver på nytt slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 2.5:
Hvor mange forbindelseslinjer kan du trekke mellom hjørnene i en n-kant?

Løsning:



Vi setter at antall forbindelseslinjer mellom hjørnene i en n-kant er x_n. Vi kan trekke 3 forbindelseslinjer mellom hjørnene i en trekant, slik at $x_3 = 3$. Dersom vi utvider med et nytt hjørne slik at vi får en 4-kant, kan vi trekke en ny forbindelseslinje fra hvert av de opprinnelige hjørnene til det nye hjørnet. Vi har derfor at

$$x_4 = x_3 + 3.$$

Generelt har vi at når det er x_n forbindelseslinjer mellom hjørnene i en n-kant, og vi føyer til ett nytt hjørne slik at vi får en $n+1$ - kant, kan vi trekke ei linje fra hvert av de n opprinnelige hjørnene til det nye hjørnet. Dette gir differenslikningen

$$x_{n+1} = x_n + n.$$

For å løse denne likningen, finner vi først løsningen av den tilhørende homogene likningen som er

$$h_{n+1} = h_n.$$

Denne løsningen er

$$h_n = C \cdot 1^n = C.$$

Siden $f(n) = n$ (førstegradspolynom i n), prøver jeg en partikulær løsning

$$p_n = A \cdot n + B \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = A \cdot (n+1) + B.$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_{n+1} = p_n + n$$
$$A(n+1) + B = (A \cdot n + B) + n$$
$$A \cdot n + A + B = A \cdot n + B + n$$
$$A = n$$

Men dette kan umulig stemme, fordi *A* skal være en konstant. Vi må altså gjøre et nytt forsøk, og prøver da å multiplisere vår første partikulære løsning med *n*. Vi prøver altså

$$p_n = n(A \cdot n + B) = An^2 + Bn$$
$$p_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) = A(n^2 + 2n + 1) + B(n+1) = An^2 + 2An + A + Bn + B$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_{n+1} = p_n + n$$
$$An^2 + 2An + A + Bn + B = (An^2 + Bn) + n$$
$$2A \cdot n + A + B = n$$
$$(2A - 1)n + (A + B) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for *alle* verdier av *n*, må vi ha at

$$2A - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = \tfrac{1}{2}}$$

og

$$A + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -A = \underline{-\tfrac{1}{2}}.$$

Dette gir en partikulær løsning

$$p_n = n\left(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{n}{2}(n-1)}.$$

Den komplette løsningen av likningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C + \tfrac{n}{2}(n-1)}.$$

Finner *C*:

$$x_3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C + \tfrac{3}{2}(3-1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C + 3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 0}.$$

Antall forbindelseslinjer mellom hjørnene i en *n*-kant er altså

$$\underline{\underline{x_n = \tfrac{n}{2}(n-1)}}.$$

Løs **Oppgave 2.3**, og fortsett med lineære 2.ordens differenslikninger.